OPERATORENIDEALE MIT SPEKTRALSPUR

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT II

der

UNIVERSITÄT ZÜRICH

von

RUDOLF OTT

von Bischofszell (Kt. Thurgau)

Begutachtet von Herrn

Prof. Dr. H. Jarchow

Zentralstelle der Studentenschaft

Zürich 1981

1982

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41507207_0081

OPERATORENIDEALE MIT SPEKTRALSPUR

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT II

der

UNIVERSITÄT ZÜRICH

von

RUDOLF OTT

von Bischofszell (Kt. Thurgau)

Begutachtet von Herrn

Prof. Dr. H. Jarchow

Zentralstelle der Studentenschaft

Zürich 1981

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Meinen Eltern gewidmet

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung 1

1. Grundlagen und Notation

1.1 Operatorenideale 4

1.2 Produkte, Quotienten, Konjugierte 12

2. Spurideale

2.1 Definition 20

2.2 Beispiele und Folgerungen 22

3. Spezielle Klassen von Spuridealen

3.1 Spurideale der Form $A \circ \Gamma_2$ bzw. $\Gamma_2 \circ A$ 25

3.2 Spurideale der Form $A \circ \mathcal{D}_2 \circ B$ 28

3.3 Spurideale der Form $\Gamma_p \circ \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_q$ bzw. $(\Gamma_p \circ \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_q)^d$ 33

3.4 Spurideale der Form $A \circ \Gamma_2 \circ B$ 40

3.5 Beziehungen zwischen den Spuridealen 44

3.6 Eine Uebersicht 45

3.7 Offene Probleme 46

Literaturverzeichnis 47

EINLEITUNG

Sei H ein Hilbert-Raum über $\mathbb{C}$ und $L(H,H)$ die Algebra der stetigen Endomorphismen von H. Ein S aus $L(H,H)$ gehört zur sogenannten Spurklasse $S(H,H)$, falls $\sum_{i\in I} |(Se_i|e_i)|$ für jede Orthonormalbasis $\{e_i/i\in I\}$ von H endlich ist. In diesem Fall ist $\sum_{i\in I} (Se_i|e_i)$ unabhängig von der gewählten Orthonormalbasis.
Deshalb ist $\tau: S(H,H) \longrightarrow \mathbb{C}: S \longmapsto \sum_{i\in I} (Se_i|e_i)$ eine Linearform, die das Spurfunktional der linearen Algebra verallgemeinert.
Ausserden gilt die sogenannte Spurformel:
$\tau(S)$ = "Summe der Eigenwerte von S" (vgl. 2.1 und 2.2.2).

Ist auf einem Ideal in $L(H,H)$ eine Linearform mit der letzteren Eigenschaft gegeben, so nennen wir diese Form Spektralspur und das Ideal ein Spurideal.

Man sieht leicht, dass $S(H,H)$ das grösste Spurideal in $L(H,H)$ ist.

Die genannten Resultate gehen auf Arbeiten von F.J.Murray-J.von Neumann (1936), R.Schatten (1946), H.Weyl (1949) und V.B.Lidskij (1959) zurück.

Anwendung findet die Spurklasse z.B. bei der Darstellung von stetigen Linearformen auf Räumen von Operatoren und in der Fredholmschen Determinantentheorie.
Für eine ausführliche Darstellung des bisher Erwähnten verweisen wir z.B. auf [5,26].

Auch in der mathematischen Physik spielt die Spurklasse eine wichtige Rolle (vgl. [27]), u.a. in der axiomatischen Begründung der Quantentheorie (vgl. [28,S.159]).

Die Begriffe "Spektralspur" und "Spurideal" können ohne weiteres auf Operatorenideale über der Klasse aller $\mathbb{C}$-Banach-Räume übertragen werden.
Verschiedene solche Spurideale sind in der Literatur beschrieben worden:

A.Grothendieck gibt in [10] zwei vom Ideal der sogenannten nuklearen Operatoren abgeleitete Spurideale an.

Dass die Ideale S_p der Operatoren mit Approximationszahlen in ℓ_p Spurideale sind, wurde für $0<p<1$ von A.S.Marcus-V.I.Macaev (1972) und für $p=1$ von H.König gezeigt [15].

Kürzlich hat A.Pietsch [23] ein Spurideal der Form $A\circ\Gamma_2\circ B$ angegeben, welches das Ideal S_1 enthält.

Im Gegensatz zum Fall von Idealen in der Endomorphismenalgebra eines Hilbert-Raumes gibt es über der Klasse aller $\mathbb{C}$-Banach-Räume allerdings kein grösstes Spurideal (vgl. 3.1.4).

Deshalb stellt sich hier die Frage nach der Existenz (im konstruktiven Sinne) und der Darstellung von maximalen Spuridealen. In voller Allgemeinheit scheint diese Frage nur schwer angreifbar zu sein. Wir beschränken uns hier darum auf die Be-

handlung gewisser, allerdings grosser Teilklassen von Idealen. Z.B. ist die in 3.4 behandelte Teilklasse so umfassend, dass sie zu jedem bekannten Spurideal ein grösseres Spurideal enthält.

Einige der in der vorliegenden Untersuchung auftretenden Spurideale waren bislang nicht als solche bekannt. Weiter sind wir in anderen Fällen in der Lage, neue Darstellungen für bekannte Spurideale zu geben.

1. GRUNDLAGEN UND NOTATION

Wir referieren zunächst kurz über einige Grundbegriffe aus der Theorie der Operatorenideale. Für Beweise und weitere Einzelheiten verweisen wir auf die Monographie [22] von A.Pietsch. Anschliessend befassen wir uns mit einer Beziehung zwischen zwei Konstruktionen mit Idealen.

1.1 Operatorenideale

Als Symbol für die Klasse aller Hilbert- bzw. aller Banach-Räume über $\mathbb{K}$ verwenden wir $\underline{H}$ bzw. $\underline{B}$. Hierbei ist $\mathbb{K}$ entweder der Körper $\mathbb{R}$ der reellen oder $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Für $E \in \underline{B}$ bezeichnet $I_E : E \to E$ die identische Abbildung, E' den topologischen Dualraum von E, $e_E : E \longrightarrow E''$ die kanonische Injektion, U_E die abgeschlossene Einheitskugel von E, E^∞ den Banach-Raum $\ell_\infty(U_{E'})$, $J_E : E \to E^\infty$ die metrische Injektion, E^1 den Banach-Raum $\ell_1(U_E)$ und $Q_E : E^1 \longrightarrow E$ die kanonische Surjektion.

Operatoren zwischen Banach-Räumen sollen in dieser Arbeit immer beschränkt und linear sein. $\mathcal{L}$ steht für die Klasse aller Operatoren zwischen beliebigen Banach-Räumen und $\mathcal{F}$ für die Klasse aller Operatoren mit endlich-dimensionalem Rang.

Für jede Unterklasse $\mathcal{A}$ von $\mathcal{L}$ und $E,F \in \underline{B}$ definieren wir die zugehörige <u>Komponente</u> $\mathcal{A}(E,F)$ als die Menge aller Operatoren von E nach F, die zu $\mathcal{A}$ gehören.

Für Banach-Räume E,F (über $\mathbb{K}$) identifizieren wir $\mathcal{F}(E,F)$ in der üblichen Weise mit $E'\otimes F$. Die Linearisierung $tr: E'\otimes E \to \mathbb{K}$ der Evaluation $E'\times E \to \mathbb{K}: (x',x) \mapsto x'(x)$ ist ein Funktional, das im endlich-dimensionalen Fall die gewöhnliche Spur liefert.

Eine Unterklasse $\mathcal{A}$ von $\mathcal{L}$ heisst <u>Operatorenideal</u> (kurz: <u>Ideal</u>), falls für alle $E,E_0,F,F_0 \in \underline{B}$ gelten:

(O1) $\mathcal{F}(E,F) \subset \mathcal{A}(E,F)$,

(O2) $\mathcal{A}(E,F)$ ist ein Unterraum von $\mathcal{L}(E,F)$,

(O3) $RST \in \mathcal{A}(E_0,F_0)$ für alle $R \in \mathcal{L}(F,F_0)$,
$S \in \mathcal{A}(E,F)$, $T \in \mathcal{L}(E_0,E)$.

In der Regel kann man auf den Komponenten eines gegebenen Ideals in natürlicher Weise eine Quasinorm definieren. Unter einer <u>Ideal-Quasinorm</u> verstehen wir eine Zuordnung $\alpha: \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$, die für alle $E,E_0,F,F_0 \in \underline{B}$ den folgenden Bedingungen genügt:

(Q1) $\alpha(I_{\mathbb{K}}) = 1$

(Q2) Es gibt eine Konstante $\kappa \geq 1$, so dass für alle $S_1,S_2 \in \mathcal{A}(E,F)$ gilt:
$$\alpha(S_1+S_2) \leq \kappa\left[\alpha(S_1) + \alpha(S_2)\right]$$

(Q3) Für alle $R \in \mathcal{L}(F,F_0)$, $S \in \mathcal{A}(E,F)$, $T \in \mathcal{L}(E_0,E)$ gilt:
$$\alpha(RST) \leq \|R\|\alpha(S)\|T\|$$

α induziert dann auf jeder Komponente von $\mathcal{A}$ in der üblichen Weise eine Hausdorffsche Topologie. Das Paar $[\mathcal{A},\alpha]$ nennen wir ein <u>quasinormiertes Ideal</u>. Sind alle Komponenten vollständig, so heisst das quasinormierte Ideal <u>vollständig</u>. Zwei Quasinormen α_1,α_2 auf einem Ideal $\mathcal{A}$ heissen <u>äquivalent</u>, wenn es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, so dass $\alpha_1(S) \leq C\cdot\alpha_2(S)$ und $\alpha_2(S) \leq C\cdot\alpha_1(S)$ für alle $S\in\mathcal{A}$ gelten. Sind $[\mathcal{A},\alpha_1]$, $[\mathcal{A},\alpha_2]$ zwei vollständige quasinormierte Ideale, so sind α_1 und α_2 äquivalent. Kann man in (Q2) die Konstante $\kappa = 1$ wählen, so nennen wir α eine <u>Idealnorm</u> und entsprechend $[\mathcal{A},\alpha]$ ein <u>normiertes Ideal</u>. Ersetzt man in den Definitionen eines Ideals bzw. einer Ideal-Quasinorm $\underline{B}$ durch $\underline{H}$, so erhalten wir entsprechend die Definitionen eines <u>H-Ideals</u>, bzw. einer <u>H-Ideal-Quasinorm</u>.

Für zwei Ideale $\mathcal{A},\mathcal{B}$ schreiben wir $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$, falls $\mathcal{A}(E,F)\subset\mathcal{B}(E,F)$ für alle $E,F\in\underline{B}$ gilt. Sind α,β Ideal-Quasinormen auf $\mathcal{A},\mathcal{B}$, so soll $[\mathcal{A},\alpha]\subset[\mathcal{B},\beta]$ bedeuten, dass neben $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$ auch noch $\alpha(T) \geq \beta(T)$ für alle $T\in\mathcal{A}$ erfüllt ist.
Ordnungsbegriffe für (quasinormierte) Ideale sind im folgenden immer in diesem Sinne zu verstehen.

Ausgehend von einem Ideal $\mathcal{A}$ kann man in mannigfacher Weise andere Ideale erhalten. Wir verwenden insbesondere die Ideale $\mathcal{A}^d$, $\mathcal{A}^\infty$ und $\mathcal{A}^1$, die folgendermassen definiert sind:

Seien $E,F\in\underline{B}$ und $S\in\mathcal{L}(E,F)$. S gehört

- zu $\mathcal{A}^d(E,F)$, falls $S'\in\mathcal{A}(F',E')$,

- zu $A^{\infty}(E,F)$, falls $J_F S \in A(E,F^{\infty})$,
- zu $A^{1}(E,F)$, falls $SQ_E \in A(E^1,F)$ ist.

Ist das Ideal A auch noch mit einer Ideal-Quasinorm α versehen, so setzt man in diesen Fällen entsprechend

- $\alpha^d(S) = \alpha(S')$,
- $\alpha^{\infty}(S) = \alpha(J_F S)$,
- $\alpha^{1}(S) = \alpha(SQ_E)$

und erhält so wiederum Ideal-Quasinormen.

Ein Ideal A heisst <u>injektiv</u> bzw. <u>surjektiv</u>, falls $A = A^{\infty}$ bzw. $A = A^1$ gilt.
A^{∞} ist das kleinste injektive Ideal, das A enthält, A^1 ist das kleinste surjektive Ideal, das A enthält.

Die in dieser Arbeit auftretenden Ideale leiten sich ab von den Idealen L,F oder den Idealen

- $[G, \|.\|]$ der <u>approximierbaren</u> Operatoren,
- $[K, \|.\|]$ der <u>kompakten</u> Operatoren,
- $[W, \|.\|]$ der <u>schwach kompakten</u> Operatoren,
- $[V, \|.\|]$ der <u>vollstetigen</u> Operatoren,
- $[N_p, \nu_p]$ der <u>p-nuklearen</u> Operatoren,
- $[I_p, \iota_p]$ der <u>p-integralen</u> Operatoren,
- $[\Gamma_p, \gamma_p]$ der <u>p-faktorisierbaren</u> Operatoren,
- $[\hat{\Gamma}_p, \hat{\gamma}_p]$ der <u>direkt p-faktorisierbaren</u> Operatoren,
- $[P_p, \pi_p]$ der <u>p-absolutsummierenden</u> Operatoren,
- $[S_r, \sigma_r]$ der <u>Operatoren mit Approximationszahlen in</u> ℓ_r.

(Dabei ist $1 \leq p \leq \infty$, $0 < r < \infty$)

Letztere sind wie folgt definiert:

Seien $E,F \in \underline{B}$ und $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Dann gilt

- $T \in \mathcal{G}(E,F)$, falls es eine Folge $(T_n)_n$ in $\mathcal{F}(E,F)$ mit $\lim_{n\to\infty} \|T-T_n\| = 0$ gibt.
- $T \in \mathcal{K}(E,F)$, falls $T(U_E)$ in F relativkompakt für die Normtopologie ist.
- $T \in \mathcal{W}(E,F)$, falls $T(U_E)$ in $[F,\sigma(F,F')]$ relativkompakt ist.
- $T \in \mathcal{V}(E,F)$, falls $(Tx_n)_n$ normkonvergent ist, für jede in $[E,\sigma(E,E')]$ konvergente Folge $(x_n)_n$.
- $T \in \mathcal{N}_p(E,F)$, falls T eine Darstellung $T = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes x_i$ mit $a_i \in E'$, $x_i \in F$, $(\|a_i\|)_i \in \ell_p$, $(x'(x_i))_i \in \ell_{p^*}$ $\forall x' \in F'$ zulässt. (Hier und im folgenden ist p^* durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ definiert).

  In diesem Falle setzt man

  $\nu_p(T) := \inf \{(\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i\|^p)^{1/p} \cdot w_{p^*}(x_i) / a_i,\ x_i \text{ wie oben}\}$.

  Für jede Folge $x_1, x_2, \ldots$ in F setzen wir dabei $w_p(x_i) := \sup \{(\sum_i |x'(x_i)|^p)^{1/p} / x' \in U_{F'}\}$. Nach Banach-Steinhaus ist dies eine reelle Zahl, wenn $(x'(x_i)) \in \ell_p$ ist für jedes $x' \in F'$.
- $T \in \mathcal{I}_p(E,F)$, falls es einen Massraum $[\Omega,\mu]$ (mit $\mu(\Omega)=1$, wenn $p<\infty$) und Operatoren $R \in \mathcal{L}(L_p(\mu),F'')$, $S \in \mathcal{L}(E,L_\infty(\mu))$ gibt, so dass $e_F T = RIS$ gilt. Dabei ist $I: L_\infty(\mu) \to L_p(\mu)$ die kanonische Abbildung. In diesem Fall setzt man $\iota_p(T) := \inf \|R\| \cdot \|S\|$, wobei das Infimum über alle Faktorisierungen von T der angegebenen Form gebildet wird.

- $T \in \Gamma_p(E,F)$, falls es einen Massraum $[\Omega,\mu]$ und Operatoren $R \in \mathcal{L}(L_p(\mu),F'')$, $S \in \mathcal{L}(E,L_p(\mu))$ mit $e_F T = RS$ gibt.
  In diesem Falle setzt man $\gamma_p(T) := \inf \|R\| \cdot \|S\|$, wobei das Infimum über alle Faktorisierungen von T der angegebenen Form gebildet wird.

- $T \in \hat{\Gamma}_p(E,F)$, falls es einen Massraum $[\Omega,\mu]$ und Operatoren $R \in \mathcal{L}(L_p(\mu),F)$, $S \in \mathcal{L}(E,L_p(\mu))$ mit $T = RS$ gibt.
  In diesem Falle setzt man $\hat{\gamma}_p(T) := \inf \|R\| \cdot \|S\|$, wobei das Infimum über alle Faktorisierungen der angegebenen Form gebildet wird.

- $T \in \mathcal{P}_p(E,F)$, falls es eine Konstante $C>0$ gibt, so dass für jede endliche Folge $x_1, \ldots, x_n$ von E gilt:
  (*) $\quad (\sum_{i=1}^{n} \|Tx_i\|^p)^{1/p} \leq C \cdot w_p(x_i)$.
  In diesem Falle setzt man
  $\pi_p(T) := \inf \{C>0 / C \text{ erfüllt } (*)\}$.

- Sei $n \in \mathbb{N}$.
  Die n-te Approximationszahl $s_n(T)$ ist definiert durch
  $s_n(T) := \inf \{\|T-A\| / \dim A(E) < n\}$.
  Man definiert $T \in \mathcal{S}_r(E,F)$, falls $(s_n(T)) \in \ell_r$ und setzt in diesem Falle $\sigma_r(T) := (\sum_n s_n(T)^r)^{1/r}$.

Von den bekannten Relationen zwischen obigen Idealen werden wir insbesondere benötigen, dass gelten:

- für $\mathcal{A} \in \{\mathcal{N},\mathcal{I},\mathcal{P},\mathcal{S}\}$ und $p \leq q$ ist stets $\mathcal{A}_p \subset \mathcal{A}_q$.
- $\mathcal{I}_r^{\infty} = \mathcal{P}_r$
- $\mathcal{I}_2 = \mathcal{P}_2$

- $\Gamma_2 = \hat{\Gamma}_2$
- $\Gamma_\infty = I_\infty$
- $P_\infty = L$
- $\mathcal{D}_2^{\,d} = \mathcal{D}_2$
- $\Gamma_p^{\,d} = \Gamma_{p*}$ $(1 \leq p \leq \infty)$
- Für $H,K \in \underline{H}$ und alle
  $A \in \{P_p, P_p^{\,d}, N_q, N_q^{\,d}, I_q, I_q^{\,d} \;/\; 1 \leq p < \infty,\ 1 < q \leq \infty\}$
  ist $S_2(H,K) = A(H,K)$.
  Das $\underline{H}$-Ideal S_2 ist das <u>Ideal der Hilbert-Schmidt-Operatoren</u>. Weiter ist $S(H,K) = B(H,K)$
  für $B \in \{N_1, I_1, N_1^{\,d}, I_1^{\,d}, \mathcal{D}_2, S_1\}$.
  Das $\underline{H}$-Ideal S ist die schon erwähnte <u>Spurklasse.</u>

Eine wichtige Rolle spielen die folgenden Faktorisierungssätze für Operatoren aus N_p bzw. P_p:

Zu $\alpha = (\alpha_n) \in \ell_\infty$ und $1 \leq p,\ q \leq \infty$ betrachten wir den Diagonaloperator $D(\alpha): \ell_p \longrightarrow \ell_q : (\xi_n)_n \longmapsto (\alpha_n \xi_n)_n$, (falls wohldefiniert).

- $T \in N_p(E,F)$ gilt, falls es ein $\alpha \in \ell_p$ und Operatoren $R \in L(\ell_p, F)$, $S \in L(E, c_0)$ gibt mit $T = RD(\alpha)S$.
- $T \in P_p(E,F)$ gilt genau dann, wenn es einen kompakten Hausdorffschen Raum K, ein positives Radon-Mass μ auf K und Operatoren $R \in L(L_p(\mu), F^\infty)$, $S \in L(E, C(K))$ gibt, so dass $J_F T = RJS$ ist; dabei ist $J: C(K) \to L_p(\mu)$ die kanonische Abbildung.

- Für $p = 2$ gilt sogar:

  $T \in \mathcal{P}_2(E,F)$ gilt genau dann, wenn es einen kompakten Hausdorffschen Raum K, ein positives Radon-Mass μ auf K und Operatoren $R \in \mathcal{L}(L_2(\mu),F)$, $S \in \mathcal{L}(E,\mathcal{C}(K))$ gibt, so dass $T = RJS$ ist; J wie oben.

1.2 *Produkte, Quotienten, Konjugierte*

Im ganzen Abschnitt seien $E,F\in\underline{B}$ und $[\mathcal{A},\alpha]$, $[\mathcal{B},\beta]$ zwei quasinormierte Ideale.

Das <u>Produktideal</u> $\mathcal{A}\circ\mathcal{B}$ wird gegeben durch

$$\mathcal{A}\circ\mathcal{B}(E,F):=\{RS/\exists G\in\underline{B},\ R\in\mathcal{A}(G,F),\ S\in\mathcal{B}(E,G)\}.$$

Durch

$$(\alpha\circ\beta)(T):=\inf\{\alpha(R)\beta(S)/T=RS,\ G,R,S \text{ wie oben}\}$$

erhält man eine Quasinorm auf $\mathcal{A}\circ\mathcal{B}$.

Sind $[\mathcal{A},\alpha]$ und $[\mathcal{B},\beta]$ vollständig, so wird auch $[\mathcal{A}\circ\mathcal{B},\alpha\circ\beta]$ vollständig.

Statt $[\mathcal{A}\circ\mathcal{A},\alpha\circ\alpha]$ schreiben wir auch $[\mathcal{A}^2,\alpha^2]$.

<u>Beispiele</u>

(a) Die Operatoren aus $[\mathcal{D}_p,\delta_p]:=[\mathcal{P}_{p^*}^d\circ\mathcal{P}_p,\pi_{p^*}^d\circ\pi_p]$ sind genau die <u>p-dominierten</u> aus [22,17.4.7] (vgl. auch [2,17]).

(b) $\mathcal{N}_{1,2,2}:=\Gamma_2\circ\mathcal{D}_2\circ\Gamma_2$ ist das kleinste Ideal, das die Spurklasse erweitert. [22,15.6.19]

(c) $\Gamma_2\circ\Gamma_1\subset\mathcal{P}_1$ gilt nach einem bekannten Satz von Grothendieck. [9,19]

(d) Nach einem Satz von Lindenstrauss-Pełczyński [19] gilt $\Gamma_2\circ\Gamma_\infty\subset\mathcal{P}_2$.
Zusammen mit dem Faktorisierungssatz für 2-absolutsummierende Operatoren ($C(K)$ ist ein abstrakter M-Raum. Identifizieren wir $C(K)'$ mit einem Raum $L_1(\mu)$, so fallen $C(K)''$

und $L_\infty(\mu)$ zusammen) ergibt sich

$$P_2 = \Gamma_2 \circ \Gamma_\infty$$

sowie

$$P_2^{\,d} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 .$$

Wegen $\Gamma_q \subset \Gamma_p \circ \Gamma_r$ für $p \leq q \leq r$ (vgl. [17,20]) und (h) gilt auch

$$\mathcal{D}_2 = \Gamma_1 \circ \Gamma_\infty .$$

(e) $S_r \circ S_s \subset S_t$ für $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{t}$ [22,14.2.3].

(f) $I_p \circ G = G \circ I_p = N_p$ [22,19.1.10].

Das (linke) <u>Quotientenideal</u> $A^{-1} \circ \mathcal{B}$ wird definiert durch

$$A^{-1} \circ \mathcal{B}(E,F) := \{S \in L(E,F) / RS \in \mathcal{B}(E,G),\ \forall R \in A(F,G),\ \forall G \in \underline{B}\}.$$

Durch

$$\alpha^{-1} \circ \beta(S) := \sup \{\beta(RS) / R \in A(F,G), \alpha(R) \leq 1,\ G \in \underline{B}\}$$

wird eine Ideal-Quasinorm auf $A^{-1} \circ \mathcal{B}$ definiert.
Analog definiert man das (rechte) <u>Quotientenideal</u> $A \circ \mathcal{B}^{-1}$ und die Ideal-Quasinorm $\alpha \circ \beta^{-1}$.

Ist $[\mathcal{B},\beta]$ vollständig, so auch $[A^{-1} \circ \mathcal{B}, \alpha^{-1} \circ \beta]$; mit $[A,\alpha]$ ist auch $[A \circ \mathcal{B}^{-1}, \alpha \circ \beta^{-1}]$ vollständig.

<u>Beispiele</u>

(g) $I_p = G^{-1} \circ N_p \circ G^{-1}$ (Klammern können hier beliebig gesetzt werden.)

(h) Es gilt $\mathcal{D}_2 = \Gamma_2^{-1} \circ A \circ \Gamma_2^{-1}$ für jedes Ideal A, das auf Hilbertraumkomponenten mit der Spurklasse übereinstimmt [22,17.5.3]. Insbesondere ist $\mathcal{D}_2$ das grösste Ideal mit

dieser Eigenschaft.

(i) Die Operatoren aus $[M_{2,1},\mu_{2,1}] := [P_2^{-1}\circ P_1, \pi_2^{-1}\circ\pi_1]$ heissen <u>(2,1)-mischende Operatoren</u>. Sie können in Analogie zu den p-absolut-summierenden Operatoren wie folgt charakterisiert werden (vgl. [22,25]):

Für jede Folge $x_1, x_2, \ldots$ in E sei

$$m_{2,1}(x_i) = \inf\{(\sum_i |\tau_i|^2)^{1/2}\cdot w_2(\hat{x}_i)/x_i=\tau_i\hat{x}_i, \tau_i\in\mathbb{C}, \hat{x}_i\in E, \forall i\}.$$

$T\in M_{2,1}(E,F)$ gilt genau dann, wenn es eine Konstante $C>0$ gibt, so dass für jede endliche Folge $x_1,\ldots,x_n$ in E gilt:

$$m_{2,1}(Sx_i) \leq C\cdot w_1(x_i).$$

(k) $V = K\circ W^{-1}$ [22,3.2.3]

Häufig kann man das duale Ideal eines Quotientenideals wiederum als Quotientenideal schreiben:

1.2.1 <u>LEMMA</u> Immer ist $[A\circ B^{-1}, \alpha\circ\beta^{-1}]^d \subset [(B^d)^{-1}\circ A^d, (\beta^d)^{-1}\circ\alpha]$; falls $[B,\beta] \subset [B^{dd},\beta^{dd}]$ gilt, besteht sogar Gleichheit.

Beweis. Seien $S\in(A\circ B^{-1})^d(E,F)$ und $T\in B^d(F,G)$. Es folgen $(TS)' = S'T' \in A(G',E')$ und $\alpha(S'T') \leq \alpha\circ\beta^{-1}(S')\beta(T')$. Dies bedeutet, dass $S\in(B^d)^{-1}\circ A^d(E,F)$ und $(\beta^d)^{-1}\circ\alpha^d(S) \leq (\alpha\circ\beta^{-1})^d(S)$.

Seien nun $S\in(B^d)^{-1}\circ A^d(E,F)$ und $[B,\beta]\subset[B^{dd},\beta^{dd}]$ sowie $T\in B(G,F')$. Dann ist $T''\in B(G'',F''')$ nach Voraussetzung, m.a.W. $T'\in B^d(F'',G')$ und damit $T'e_F S\in A^d(E,G')$. Daraus folgt $S'T = S'e_F{}'T''e_G \in A(G,E')$.

Somit ist $S' \in A \circ B^{-1}(F',E')$, d.h. $S \in (A \circ B^{-1})^d(E,F)$. Aehnlich ergibt sich die behauptete Ungleichung für die Ideal-Quasinormen.

$\square$

Das Zeichen $\square$ markiert hier und im folgenden das Ende eines Beweises.

Bemerkung

Analog zu 1.2.1 kann man $(A^{-1} \circ B)^d \subset B^d \circ (A^d)^{-1}$ beweisen. Hier zieht allerdings selbst $A = A^{dd}$ nicht die Gleichheit nach sich: Da $K = K^d$, $W = W^d$ gelten (dies ist die idealtheoretische Formulierung klassischer Sätze von J.Schauder und V.Gantmacher), haben wir

$$(W^{-1} \circ K)^d \subset K \circ W^{-1}$$

und mit 1.2.1

$$(K \circ W^{-1})^{dd} = (W^{-1} \circ K)^d \subset K \circ W^{-1} = V.$$

Nun ist aber bekanntlich [22,2.8.2 und 4.4.12]

$$I_{\ell_1} \in V \quad \text{und} \quad (I_{\ell_1})'' \notin V.$$

Als adjungierte Objekte zu einem quasinormierten Ideal $[A,\alpha]$ sind in der Literatur zwei verschiedene Ideale eingeführt worden, nämlich das adjungierte Ideal $[A^*,\alpha^*]$ von A.Pietsch [22] und das konjugierte Ideal $[A^\Delta,\alpha^\Delta]$ von Y.Gordon-D.R.Lewis-J.R.Retherford [8]. In unserem Zusammenhang werden die konjugierten Ideale eine herausragende Rolle spielen. Wir beschränken uns deshalb auf ihre Definition:

Seien $E,F \in \underline{B}$ und $S \in L(E,F)$. S gehört zu $A^\Delta(E,F)$, falls eine Konstante $C_S > 0$ existiert, so dass

für alle $L \in \mathcal{F}(F,E)$ gilt:

(*) $\quad |tr(SL)| \leq C_S \cdot \alpha(L)$.

In diesem Falle setzt man

$\alpha^{\Delta}(S) := \inf \{C_S > 0 \ / \ C_S$ erfüllt (*) für alle $L \in \mathcal{F}(F,E)\}$.

$[A^{\Delta}, \alpha^{\Delta}]$ ist ein vollständiges normiertes Ideal. In [8] ist $[A,\alpha]^{\Delta} := [A^{\Delta}, \alpha^{\Delta}]$ für zahlreiche wichtige Ideale berechnet worden. Wir verwenden daraus insbesondere:

$$[\mathcal{L}, \|\cdot\|]^{\Delta} = [\mathcal{I}_1, \iota_1]$$
$$[\mathcal{P}_p, \pi_p]^{\Delta} = [\mathcal{I}_{p^*}, \iota_{p^*}]$$
$$[\mathcal{D}_p, \delta_p]^{\Delta} = [\Gamma_{p^*}, \gamma_{p^*}], \quad (1 \leq p \leq \infty).$$

Bringt man in diesen Gleichungen "Δ" auf die rechte Seite, so bleiben sie mindestens für Komponenten (E,F) richtig, in denen E oder F die metrische Approximationseigenschaft hat.

Es gibt einen engen Zusammenhang zwischen Quotientenidealen und den Konjugierten von Produktidealen, den wir im Rest dieses Abschnitts behandeln. Anwendungen ergeben sich bei der konkreten Berechnung von Quotientenidealen. Wir weisen darauf hin, dass neben der hier gegebenen auch eine isometrische Version bewiesen werden kann, die wir indessen nicht benötigen werden.

Das Produktideal $[A \circ B, \alpha \circ \beta]$ heisst <u>links-finit</u> [bzw. <u>rechts-finit</u>], falls es eine Konstante $C>0$ gibt, so dass für jedes Paar $(E,F) \in \underline{B} \times \underline{B}$, jedes $L \in \mathcal{F}(E,F)$ und jedes $\varepsilon > 0$ gilt:
Es gibt ein $G \in \underline{B}$ und $A \in \mathcal{F}(G,F)$, $B \in \mathcal{B}(E,G)$ [bzw. $A \in \mathcal{A}(G,F), B \in \mathcal{F}(E,G)$]

mit $AB = L$ und $\alpha(A)\beta(B) \leq C(1+\varepsilon)(\alpha\circ\beta)(L)$.

Weiter sagen wir, dass Γ_2 ein <u>Faktor</u> von $\mathcal{A}$ sei, falls es quasinormierte Ideale $[\mathcal{R},\rho]$, $[\mathcal{S},\sigma]$ gibt, so dass $\mathcal{A} = \mathcal{R}\circ\Gamma_2\circ\mathcal{S}$ gilt und α äquivalent zu $\rho\circ\gamma_2\circ\sigma$ ist.

1.2.2 <u>LEMMA</u>

(i) Falls $\mathcal{B}$ injektiv und β und β^∞ äquivalent sind, oder falls Γ_2 ein Faktor von $[\mathcal{A},\alpha]$ ist, so ist $[\mathcal{A}\circ\mathcal{B},\alpha\circ\beta]$ links-finit.

(ii) Falls $\mathcal{A}$ surjektiv und α und α^1 äquivalent sind, oder falls Γ_2 ein Faktor von $[\mathcal{B},\beta]$ ist, so ist $[\mathcal{A}\circ\mathcal{B},\alpha\circ\beta]$ rechts-finit.

<u>Bemerkung</u>

Falls $\mathcal{B}$ (bzw. $\mathcal{A}$) vollständig ist, so zieht die Injektivität von $\mathcal{B}$ (bzw. die Surjektivität von $\mathcal{A}$) bereits die Aequivalenz von β und β^∞ (bzw. von α und α^1) nach sich.

Beweis.

(i) Seien $\mathcal{B}$ injektiv, β und β^∞ äquivalent sowie $\varepsilon>0$. Weiter sei $C\geq 0$ eine Konstante mit $\beta(B) \leq C\cdot\beta^\infty(B)$ für alle $B\in\mathcal{B}$. Zu $L\in\mathcal{F}(E,F)$ wählen wir $G\in\underline{B}$, $A\in\mathcal{A}(G,F)$, $B\in\mathcal{B}(E,G)$ mit $L=AB$ und $\alpha(A)\beta(B) \leq (1+\varepsilon)(\alpha\circ\beta)(L)$. Wegen der Voraussetzung können wir sogar erreichen, dass B dichtes Bild hat und dass $\alpha(A)\beta(B) \leq (1+\varepsilon)\, C(\alpha\circ\beta)(L)$ gilt. Weil B dichtes Bild hat, ist $A\in\mathcal{F}(G,F)$.

Seien nun $\mathcal{A}=\mathcal{R}\circ\Gamma_2\circ\mathcal{S}$, α und $\rho\circ\gamma_2\circ\sigma$ äquivalent sowie $\varepsilon>0$. Weiter sei $C_1\geq 0$ eine Konstante, derart dass

$\alpha(A) \leq C_1(\rho\circ\gamma_2\circ\sigma)(A)$ und $\rho\circ\gamma_2\circ\sigma(A) \leq C_1\alpha(A)$ für alle $A\in\mathcal{A}$ erfüllt sind. Zu $L\in\mathcal{F}(E,F)$ wählen wir wiederum $G\in\underline{B}$, $A\in\mathcal{A}(G,F)$, $B\in\mathcal{B}(E,G)$ mit $L=AB$ und $\alpha(A)\beta(B) \leq (1+\varepsilon)(\alpha\circ\beta)(L)$. Anschliessend wählen wir $H\in\underline{H}$, $R\in\mathcal{R}(H,F)$, $S\in\mathcal{S}(G,H)$ mit $A=RS$ und $\rho(R)\sigma(S) \leq C_1(1+\varepsilon)\alpha(A)$. O.B.d.A. kann R injektiv angenommen werden. $H_0 := R^{-1}(L(E))$ ist damit endlich-dimensional. Seien $P:H \to H_0$ die Orthogonalprojektion und $J:H_0 \to H$ die kanonische Inklusion. $A_0 := RJPS$ hat endlich-dimensionales Bild, und es ist $L=A_0B$.

Weiter gilt
$$\alpha(A_0)\beta(B) \leq C_1\rho(RJ)\sigma(PS)\beta(B) \leq$$
$$C_1\rho(R)\sigma(S)\beta(B) \leq C_1^2(1+\varepsilon)\alpha(A)\beta(B) \leq$$
$$C_1^2(1+\varepsilon)^2(\alpha\circ\beta)(L).$$

(ii) wird analog bewiesen. ▱

1.2.3 <u>SATZ</u> (i) $(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})^\Delta \subset \mathcal{B}^{-1}\circ\mathcal{A}^\Delta$.

Falls $[\mathcal{A}\circ\mathcal{B},\alpha\circ\beta]$ links-finit ist, besteht sogar Gleichheit.

(ii) $(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})^\Delta \subset \mathcal{B}^\Delta\circ\mathcal{A}^{-1}$.

Falls $[\mathcal{A}\circ\mathcal{B},\alpha\circ\beta]$ rechts-finit ist, besteht sogar Gleichheit.

Beweis (nur für (ii)).

Seien $T\in(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})^\Delta(E,F)$, $G\in\underline{B}$, $A\in\mathcal{A}(G,E)$ und $L\in\mathcal{F}(F,G)$.

Dann ist $|\mathrm{tr}(TAL)| \leq (\alpha\circ\beta)^\Delta(T)(\alpha\circ\beta)(AL) \leq (\alpha\circ\beta)^\Delta(T)\alpha(A)\beta(L)$.

Daraus folgt $TA \in \mathcal{B}^{\Delta}(G,F)$ und $\beta^{\Delta}(TA) \leq (\alpha\circ\beta)^{\Delta}(T)\alpha(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$.
Also ist $T \in \mathcal{B}^{\Delta}\circ\mathcal{A}^{-1}(E,F)$ und $\beta^{\Delta}\circ\alpha^{-1}(T) \leq (\alpha\circ\beta)^{\Delta}(T)$.

Seien nun $[\mathcal{A}\circ\mathcal{B},\alpha\circ\beta]$ rechts-finit, $T \in \mathcal{B}^{\Delta}\circ\mathcal{A}^{-1}(E,F)$, $L \in \mathcal{F}(F,E)$ und $\varepsilon>0$. Dann gibt es eine Konstante C_2, $G \in \underline{B}$, $B \in \mathcal{F}(F,G)$, $A \in \mathcal{A}(G,E)$ mit $L=AB$ und $\alpha(A)\beta(B) \leq C_2(1+\varepsilon)(\alpha\circ\beta)(L)$. Folglich ist

$$\begin{aligned} |tr(TL)| = |tr(TAB)| &\leq \beta^{\Delta}(TA)\beta(B) \leq \\ &\alpha(A)\beta(B)(\beta^{\Delta}\circ\alpha^{-1})(T) \leq \\ &C_2(1+\varepsilon)(\alpha\circ\beta)(L)(\beta^{\Delta}\circ\alpha^{-1})(T). \end{aligned}$$

Damit ist $T \in (\mathcal{A}\circ\mathcal{B})^{\Delta}(E,F)$ und $(\alpha\circ\beta)^{\Delta}(T) \leq C_2(\beta^{\Delta}\circ\alpha^{-1})(T)$. ▱

<u>Bemerkung</u>

In [13] wird behauptet, dass in 1.2.3 (i) für alle normierten Ideale $[\mathcal{A},\alpha]$, $[\mathcal{B},\beta]$ Gleichheit besteht. Wir geben ein Gegenbeispiel:

Angenommen es sei $(\mathcal{L}\circ\mathcal{N}_1)^{\Delta} \supset \mathcal{N}_1^{-1}\circ\mathcal{L}^{\Delta}$. Dann folgt $\mathcal{N}_1^{\Delta} = \mathcal{L}$ wegen $\mathcal{L}^{\Delta} = \mathcal{I}_1$ und $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{I}_1$. Seien $E \in \underline{B}$, $S \in \mathcal{L}(E,E)$ und $L \in \mathcal{F}(E,E)$.
Aus $\mathcal{N}_1^{\Delta} = \mathcal{L}$ erhalten wir

$$|tr(SL)| = \nu_1^{\Delta}(S)\nu_1(L) \quad \forall S \in \mathcal{L}(E,E).$$

Das heisst aber, dass $tr:\mathcal{F}(E,E) \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig für ν_1 ist. Mit [9] schliessen wir daraus, dass jeder Banach-Raum die Approximationseigenschaft hat, was bekanntlich falsch ist (siehe [4]).

<u>Beispiele</u>

(ℓ) $\Gamma_2^{\Delta}=(\Gamma_2\circ\mathcal{L}\circ\Gamma_2)^{\Delta}=\Gamma_2^{-1}\circ(\Gamma_2\circ\mathcal{L})^{\Delta}=\Gamma_2^{-1}\circ\mathcal{I}_1\circ\Gamma_2^{-1}=\mathcal{D}_2$, vgl. (h).

(m) $\mathcal{M}_{2,1}=\mathcal{P}_2^{-1}\circ\mathcal{P}_1=\mathcal{P}_2^{-1}\circ\Gamma_{\infty}^{\Delta}=(\Gamma_{\infty}\circ\mathcal{P}_2)^{\Delta}=\mathcal{P}_2\circ\Gamma_{\infty}^{-1}=\Gamma_2\circ\Gamma_{\infty}^{-1}$ (vgl. [22,20.3]; $\Gamma_2\circ\Gamma_{\infty}^{-1} \subset \mathcal{P}_2^{-1}\circ\mathcal{P}_1$ ergibt sich mit 1.2(d),3.1.3 wegen $\mathcal{P}_1=\mathcal{P}_1\circ\Gamma_{\infty}^{-1}$). Mit 1.2.1 folgt nun $\mathcal{M}_{2,1}^{d}=\Gamma_1^{-1}\circ\Gamma_2$.

2. SPURIDEALE

Von jetzt an betrachten wir nur noch komplexe Banach- bzw. Hilbert-Räume.

2.1 Definition

Seien $E \in \underline{B}$ und $S \in \mathcal{L}(E,E)$. Unter der <u>algebraischen Multiplizität</u> eines Eigenwertes λ von S versteht man die Dimension des von $\bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ker}[(\lambda I_E - S)^n]$ erzeugten Unterraumes von E.

Falls S nur abzählbar viele nichttriviale Eigenwerte hat, die zudem alle von endlicher algebraischer Multiplizität sind, so bezeichnet $(\lambda_n(S))$ eine betragsmässig fallende Anordnung dieser Eigenwerte, wobei jeder Eigenwert sooft repetiert wird, wie seine algebraische Multiplizität angibt.

Ein Ideal $\mathcal{A}$ ($\underline{H}$-Ideal $\mathcal{A}$) heisst <u>Spurideal</u> (<u>H-Spurideal</u>), falls für jedes $E \in \underline{B}$ ($E \in \underline{H}$) gelten:

(R) Jedes $S \in \mathcal{A}(E,E)$ hat nur abzählbar viele nichttriviale Eigenwerte, und jeder von diesen ist von endlicher algebraischer Multiplizität,

(Σ) $(\lambda_n(S)) \in \ell_1$ für jedes $S \in \mathcal{A}(E,E)$,

(+) $\operatorname{Tr}: \mathcal{A}(E,E) \longrightarrow \mathbb{C} : S \longmapsto \sum_n \lambda_n(S)$ ist additiv (und damit linear).

Die Klasse aller Spurideale bezeichnen wir mit $\mathfrak{T}$ oder auch mit $\mathfrak{T}(\underline{B})$ und die Klasse aller $\underline{H}$-Spurideale mit $\mathfrak{T}(\underline{H})$.

Wir bezeichnen die "Linearform" Tr (definiert auf $\bigcup_{E \in \underline{B}} A(E,E)$) als <u>Spektralspur</u> von A.

Es gibt auch andere Möglichkeiten, den Begriff eines Spurideals zu definieren, dafür verweisen wir insbesondere auf [23].

2.2 *Beispiele und Folgerungen*

Durch Zurückspielen auf endlich-dimensionale Räume erhält man:

2.2.1 LEMMA $\mathcal{F}$ ist ein Spurideal, und auf $\mathcal{F}$ stimmen tr und die Spektralspur überein.

Beweis. (R) und (Σ) sind für $\mathcal{F}$ trivialerweise erfüllt. Seien $E \in \underline{B}$ und $S = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \in \mathcal{F}(E,E)$ mit $a_i \in E'$, $x_i \in E$ für $i=1,\ldots,n$. O.B.d.A. können die $x_1,\ldots,x_n$ linear unabhängig angenommen werden. Wir bilden die lineare Hülle E_0 von $\{x_1,\ldots,x_n\}$ in E und setzen $S_0 := S|_{E_0}$. Bezüglich der Basis $\{x_1,\ldots,x_n\}$ wird S_0 dann durch die Matrix $\left(a_i(x_j)\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ dargestellt, und bekanntlich gilt deshalb $\mathrm{tr}(S) = \sum_i a_i(x_i) = \sum_i \lambda_i(S_0)$. Da tr linear ist und da offenbar (bei geeigneter Numerierung der Eigenwerte) $\lambda_i(S_0) = \lambda_i(S)$ für $i=1,\ldots,n$ gilt, ergibt sich die Behauptung. ▱

Grundlegend für alles folgende ist das schon in der Einleitung erwähnte

2.2.2 THEOREM (i) Die Spurklasse $\mathcal{S}$ ist ein $\underline{H}$-Spurideal.

(ii) Für jedes $\underline{H}$-Spurideal $\mathcal{A}$ gilt $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$.

Für den Beweis von (i) verweisen wir auf [18], siehe auch [5,26,27].

(ii) ist ein Korollar des folgenden Lemmas 2.2.3 (ii).

2.2.3 <u>LEMMA</u> Sei $[A,\alpha]$ ein quasinormiertes vollständiges Spurideal. Dann gelten:

(i) Für jedes $E\in\underline{B}$ ist $Tr:A(E,E)\to\mathbb{C}$ stetig für α,

(ii) $A\subset I_1$.

Beweis. Nach [21] gibt es eine Konstante $C\geq 0$, so dass $\sum_i |\lambda_i(T)| \leq C\cdot\alpha(T)$ $\forall T\in A(E,E)$, $\forall E\in\underline{B}$. Daraus folgt sofort (i). Seien $E,F\in\underline{B}$ und $L\in F(F,E)$. Für $S\in A(E,F)$ ist dann $|tr(SL)| \leq C\cdot\alpha(SL) \leq C\cdot\alpha(S)\|L\|$.
Somit ist $S\in L^{\Delta}(E,F) = I_1(E,F)$. ▱

2.2.4 <u>LEMMA</u> Ist A ein Spurideal, so auch A^d.

Beweis. Seien $E\in\underline{B}$ und $S\in A(E,E)$. Weil (bei geeigneter Numerierung) $\lambda_n(S) = \lambda_n(S')$ gilt (vgl. z.B. [3,Chapt.2.3]), übertragen sich (R), (Σ) und (+) unmittelbar von A auf A^d. ▱

Ein weiteres zentrales Hilfsmittel wird durch das Konzept der sogenannten verwandten Operatoren [22,27.3] geliefert.

Seien $E,F\in\underline{B}$. $R\in L(E,E)$ und $S\in L(F,F)$ heissen <u>verwandt</u>, falls es $A\in L(F,E)$ und $B\in L(E,F)$ mit $R=AB$ und $S=BA$ gibt.

2.2.5 <u>LEMMA</u> Seien $E,F\in\underline{B}$ und seien $R\in L(E,E)$, $S\in L(F,F)$ verwandt. Dann besitzen R und S dieselben nichttrivialen Eigenwerte mit denselben algebraischen Multiplizitäten.

Für den Beweis vgl. [22].

2.2.6 <u>KOROLLAR</u> Seien $E,F\in\underline{B}$, $\mathcal{A}\in\mathcal{J}$, $S\in\mathcal{L}(E,F)$, $T\in\mathcal{A}(F,E)$.
Dann ist $Tr(ST) = Tr(TS)$.

Das folgende Theorem ermöglicht es, aus gewissen Spuridealen (insbesondere $\underline{H}$-Spuridealen) neue Spurideale zu konstruieren. Wir formulieren und beweisen es nur in der für unsere Anwendungen nötigen Allgemeinheit (vgl. auch [23]).
Dabei setzen wir $\mathcal{F}_{\underline{B}} := \mathcal{L}$, $\mathcal{F}_{\underline{H}} := \Gamma_2$.

2.2.7 <u>THEOREM</u> Seien $\mathcal{A},\mathcal{B}$ Ideale und $\underline{K}\in\{\underline{B},\underline{H}\}$
Falls $\mathcal{A}\circ\mathcal{B}$ zu $\mathcal{J}(\underline{K})$ gehört, so folgt $\mathcal{B}\circ\mathcal{F}_{\underline{K}}\circ\mathcal{A}\in\mathcal{J}$.

Beweis. Seien $\underline{K}\in\{\underline{B},\underline{H}\}$, $\mathcal{A}\circ\mathcal{B}\in\mathcal{J}(\underline{K})$, $E\in\underline{B}$ und $S_1,S_2\in\mathcal{B}\circ\mathcal{F}_{\underline{K}}\circ\mathcal{A}(E,E)$ gegeben. Dann gibt es $F_i\in\underline{K}$, $B_i\in\mathcal{B}(F_i,E)$, $A_i\in\mathcal{A}(E,F_i)$, so dass $S_i = B_i\circ A_i$ für $i=1,2$. $Pr_i: F_1\times F_2\to F_i$ bzw. $J_i: F_i\to F_1\times F_2$ sollen die kanonischen Projektionen bzw. Injektionen bezeichnen $(i=1,2)$, und $\Sigma : E\times E\to E$ sei die Addition. Dann ist

$$S_1 + S_2 = \Sigma\circ(B_1\times B_2)\circ(J_1A_1+J_2A_2)$$

verwandt zu

$$T = (J_1A_1+J_2A_2)\circ\Sigma\circ(B_1\times B_2) =$$
$$J_1A_1B_1Pr_1 + J_1A_1B_2Pr_2 + J_2A_2B_1Pr_1 + J_2A_2B_2Pr_2.$$

Da alle vier Summanden zu $\mathcal{A}\circ\mathcal{B}(F_1\times F_2,F_1\times F_2)$ gehören und $J_1A_1B_2Pr_2$, $J_2A_2B_1Pr_1$ Volterra-Operatoren sind, haben wir

$$\sum_n \lambda_n(S_1+S_2) = \sum_n \lambda_n(T) = \sum_n \lambda_n(A_1B_1) + \sum_n \lambda_n(A_2B_2) =$$
$$\sum_n \lambda_n(S_1) + \sum_n \lambda_n(S_2).$$

Aufgrund von 2.2.5 ist damit alles bewiesen. ▱

3. SPEZIELLE KLASSEN VON SPURIDEALEN

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit maximalen Elementen in verschiedenen Klassen von Spuridealen. A und B stehen jeweils für beliebige Ideale.

3.1 Spurideale der Form $A \circ \Gamma_2$ bzw. $\Gamma_2 \circ A$

In der Klasse der Spurideale der Form $A \circ \Gamma_2$ bzw. $\Gamma_2 \circ A$ gibt es ein grösstes Element.

3.1.1 SATZ $A \circ \Gamma_2$ und $\Gamma_2 \circ A$ sind genau dann Spurideale, wenn $A \subset \mathcal{D}_2$ ist.

Beweis. Aus $A \subset \mathcal{D}_2$ folgt $A \circ \Gamma_2 \in \mathcal{J}$ mit 1.2(h), 2.2.2 und 2.2.7. Sei umgekehrt $A \circ \Gamma_2 \in \mathcal{J}$. Dann ist auch $A \circ \Gamma_2 \in \mathcal{J}(\underline{H})$, und wiederum mit 1.2(h) und 2.2.2 folgt $A \subset \mathcal{D}_2$.
Analoger Beweis für $\Gamma_2 \circ A$. ///

3.1.2 KOROLLAR $\mathcal{D}_2 \circ \Gamma_2$ (bzw. $\Gamma_2 \circ \mathcal{D}_2$) ist das grösste unter allen Spuridealen der Form $A \circ \Gamma_2$ (bzw. $\Gamma_2 \circ A$).

Obgenannte Ideale sind schon in [10] und [11] als Spurideale erkannt worden, wenn auch in einer anderen Darstellung.
Diese Ideale lassen sich auf mannigfache Weise als Produktideale schreiben. Wir geben einige Beispiele im folgenden Satz.

3.1.3 <u>SATZ</u> Für $1 \leq p, q \leq 2$ gelten:

$$\Gamma_2 \circ \mathcal{D}_2 = \Gamma_2 \circ N_1 = P_p \circ P_q = N_2^2 = (N_1^2)^\infty$$

und

$$\mathcal{D}_2 \circ \Gamma_2 = N_1 \circ \Gamma_2 = P_p^d \circ P_q^d = (N_2^d)^2 = (N_1^2)^1.$$

Beweis für $\Gamma_2 \circ \mathcal{D}_2$. Weil $\Gamma_2 \circ N_1$ offenbar injektiv ist, erhält man aus den Faktorisierungssätzen für Operatoren aus N_1, N_2:

$$(N_1^2)^\infty \subset \Gamma_2 \circ N_1 \subset N_2^2 \subset \Gamma_2 \circ \mathcal{D}_2 \subset P_2^2 .$$

Seien nun $E, F \in \underline{B}$ und $T \in P_2^2(E,F)$. Nach [22,24.6.5] ist $T \in \Gamma_2 \circ N_1(E,F)$. Es gibt also ein $H \in \underline{H}$ und $U \in L(H,F)$, $V \in L(\ell_1, H)$, $W \in G(\ell_1, \ell_1)$, $X \in N_1(E, \ell_1)$ mit $T = UVWX$. Wegen 1.2(c) ist $UV \in P_1(\ell_1, F)$ und es folgt $J_F UV \in I_1(\ell_1, F^\infty)$.
Da $I_1 \circ G = N_1$ (vgl. 1.2(f)), haben wir $J_F UVWX \in N_1^2(E, F^\infty)$.
Es bleibt noch zu zeigen, dass $P_2^2 \subset P_1^2$ ist. Dies folgt aber aus $P_2^2 = \Gamma_2 \circ N_1$ mit dem Faktorisierungssatz für N_1 und 1.2(c) wie oben. ▯

Für eine Anwendung des Ideals P_2^2 in der Fredholmschen Determinantentheorie vgl. [16].

Man beweist leicht:

3.1.4 <u>LEMMA</u> (i) $(\Gamma_2 \circ \mathcal{D}_2)^d = \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_2$, $(\mathcal{D}_2 \circ \Gamma_2)^d = \Gamma_2 \circ \mathcal{D}_2$.

(ii) $\Gamma_2 \circ \mathcal{D}_2$ ist injektiv, $\mathcal{D}_2 \circ \Gamma_2$ ist surjektiv.

Die Frage, ob es ein Spurideal gibt, das $\Gamma_2 \circ \mathcal{D}_2$ und auch $\mathcal{D}_2 \circ \Gamma_2$ enthält, ist naheliegend. Sie wird durch das folgende Beispiel negativ beantwortet.

Seien $3/2 < p \leq 2$ und $\mu \in \ell_p \setminus \ell_{3/2}$. Wir setzen

$$S : \ell_\infty \longrightarrow \ell_2 : (\xi_n) \longmapsto (\mu_n^2 \xi_n),$$

$$T : \ell_2 \longrightarrow \ell_\infty : (\xi_n) \longmapsto (\mu_n \xi_n).$$

Wegen $(\mu_n^2) \in \ell_1$ ist $S \in N_1(\ell_\infty, \ell_2) = \Gamma_2 \circ \mathcal{D}_2(\ell_\infty, \ell_2)$.
Seien $R \in L(\ell_\infty, \ell_2)$ beliebig und $J_{1,2} : \ell_1 \hookrightarrow \ell_2$, $J_{2,\infty} : \ell_2 \hookrightarrow \ell_\infty$ die Inklusionen. Dann ist $RT = RJ_{2,\infty}J_{1,2}D(\mu)$ und $RJ_{2,\infty} \in S_2(\ell_2, \ell_2)$, $J_{1,2}D(\mu) \in S_2(\ell_2, \ell_2)$, also $RT \in S_1(\ell_2, \ell_2) = N_1(\ell_2, \ell_2)$. Es folgt $T \in \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_2(\ell_2, \ell_\infty)$.

Sei nun $E := \ell_\infty \times \ell_2$ versehen mit einer der üblichen Normen. Wir definieren

$$S_1 : E \longrightarrow E : (x,y) \longmapsto (0, Sx)$$

$$T_1 : E \longrightarrow E : (x,y) \longmapsto (Ty, 0)$$

Dann sind $S_1 \in \Gamma_2 \circ \mathcal{D}_2(E,E)$ und $T_1 \in \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_2(E,E)$.

Aus $(S_1+T_1)(e_n, \mu_n^{1/2} e_n) = (\mu_n^{3/2} e_n, \mu_n^2 e_n) = \mu_n^{3/2}(e_n, \mu_n^{1/2} e_n)$ folgt, dass die Eigenwerte von $S_1 + T_1$ <u>nicht absolut</u> summierbar sind (aber sie sind summierbar). Es ist also unmöglich, dass S_1 und S_2 Elemente ein und desselben Spurideals sind. Damit ist u.a. auch gezeigt:

3.1.4 <u>SATZ</u> Es gibt kein grösstes Ideal in $\mathcal{T}$.

3.2 *Spurideale der Form* $A \circ \mathcal{D}_2 \circ B$

Grundlegend für die Klasse $\mathcal{J}_{\mathcal{D}_2}$ aller Spurideale der Form $A \circ \mathcal{D}_2 \circ B$ ist

3.2.1 <u>SATZ</u> Genau dann ist $A \circ \mathcal{D}_2 \circ B$ ein Spurideal, wenn $B \circ A \subset \Gamma_2$ gilt.

Beweis. $A \circ \mathcal{D}_2 \circ B \in \mathcal{J}$ ist nach 1.2(a) und 2.2.7 äquivalent zu $P_2 \circ B \circ A \circ P_2^d \in \mathcal{J}$. Gemäss 3.1.1 bedeutet dies $P_2 \circ B \circ A \circ P_2^d \subset \mathcal{D}_2$, d.h. $B \circ A \subset P_2^{-1} \circ \mathcal{D}_2 \circ (P_2^d)^{-1} = P_2^{-1} \circ [P_2^d \circ \Gamma_2]^\Delta = P_2^{-1} \circ P_2^d = [P_2^d \circ P_2]^\Delta = \mathcal{D}_2^\Delta = \Gamma_2$ nach 1.2.3. ▱

In $\mathcal{J}_{\mathcal{D}_2}$ erhält man jedes maximale Ideal mittels der im folgenden beschriebenen Konstruktionsmethode.

Für ein Ideal A setzen wir:

$$A^\circ := A^{-1} \circ \Gamma_2$$

$$A^\bullet := \Gamma_2 \circ A^{-1}$$

3.2.2 <u>LEMMA</u> Folgende Aussagen gelten für jedes Ideal A:

(i) $A \subset A^{\bullet\circ}$, $A \subset A^{\circ\bullet}$

(ii) $A^{\circ\bullet} \circ A^\circ \subset \Gamma_2$, $A^\bullet \circ A^{\bullet\circ} \subset \Gamma_2$

(iii) A° ist surjektiv, $A^\bullet$ ist injektiv.

Beweis.

(i) $A \subset A^{\bullet\circ}$ ist äquivalent zu $A \subset (A^\bullet)^{-1} \circ \Gamma_2$ und dies wiederum zu $A^\bullet \circ A \subset \Gamma_2$. Letzteres ist nach Definition von $A^\bullet$ erfüllt.

(ii) $A^{o\bullet}\circ A^{o} \subset \Gamma_2$ folgt direkt aus der Definition von $A^{o\bullet}$.

(iii) Seien $E_0, E, F \in \underline{B}$, $J_F T \in A^{\bullet}(E,F^{\infty})$ und $U \in A(E_0,E)$. Dann ist $J_F TU \in \Gamma_2(E_0,F^{\infty})$. Weil Γ_2 injektiv ist [22,8.4.9], folgt $TU \in \Gamma_2(E_0,F)$. Da dies für jedes $U \in A(E_0,E)$ und jedes $E_0 \in \underline{B}$ gilt, schliessen wir $T \in A^{\bullet}(E,F)$.

Die restlichen Aussagen werden analog bewiesen. ▱

Als Hauptresultat dieses Abschnittes folgt nun:

3.2.3 <u>THEOREM</u> Für jedes Ideal A sind $A^{o}\circ\mathcal{D}_2\circ A^{o\bullet}$ und $A^{\bullet o}\circ\mathcal{D}_2\circ A^{\bullet}$ maximal in $\mathcal{T}_{\mathcal{D}_2}$.

Beweis. Nach 3.2.2,(ii) sind $A^{o}\circ\mathcal{D}_2\circ A^{o\bullet}$, $A^{\bullet o}\circ\mathcal{D}_2\circ A^{\bullet}$ in $\mathcal{T}_{\mathcal{D}_2}$. Wir beweisen die Maximalität von $A^{o}\circ\mathcal{D}_2\circ A^{o\bullet}$. Das andere Ideal kann analog behandelt werden.

Seien A, X, Y Ideale mit $A^{o}\circ\mathcal{D}_2\circ A^{o\bullet} \subset X\circ\mathcal{D}_2\circ Y \in \mathcal{T}$.

Wir behaupten:

(1) $X \subset A^{o}$,

(2) $Y \subset A^{o\bullet}$.

(1) Wegen 3.2.2,(iii) genügt es, für $E,F \in \underline{B}$ zu zeigen:

$$X(E^1,F) \subset A^{o}(E^1,F).$$

Angenommen, es gibt ein $X \in X(E^1,F)\setminus A^{o}(E^1,F)$. Dann existieren ein $G \in \underline{B}$ und ein $A \in A(F,G^{\infty})$ mit $AX \notin \Gamma_2(E^1,G^{\infty}) = \mathcal{D}_2(E^1,G^{\infty})$. Mit 1.2(h) folgt die Existenz von $H,K \in \underline{H}$ und $S \in L(H,E^1)$, $T \in L(G^{\infty},K)$ mit $TAXS \notin S_1(H,K)$.

Weiter gibt es (wie aus einem Satz von Landau, vgl.[14], folgt)

ein $C \in S_2(K,K)$, so dass $CTAXS \notin S_{2/3}(H,K)$. Andrerseits ist jedoch wegen $\Gamma_2 = \Gamma_2 \circ A^{\circ}$ und 1.2,(a),(d),(e):

$$CTAXS \in \mathcal{D}_2 \circ A \circ X \circ \Gamma_1(H,K) \subset A^{\circ} \circ \mathcal{D}_2 \circ A^{\circ\bullet} \circ X \circ \Gamma_1(H,K) \subset$$
$$X \circ \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{Y} \circ X \circ \Gamma_1(H,K) \subset \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1(H,K) = S_{2/3}(H,K).$$

Also ergibt sich ein Widerspruch.

(2) Wegen 3.2.2,(iii) genügt es für $F,G \in \underline{B}$ zu zeigen:

$$\mathcal{Y}(F,G^{\infty}) \subset A^{\circ\bullet}(F,G^{\infty}).$$

Angenommen, es gibt ein $Y \in \mathcal{Y}(F,G^{\infty}) \setminus A^{\circ\bullet}(F,G^{\infty})$. Dann ist $YB \notin \Gamma_2(E^1,G^{\infty}) = \mathcal{D}_2(E^1,G^{\infty})$ für ein geeignetes $E \in \underline{B}$ und $B \in A^{\circ}(E^1,F)$. Wiederum wählen wir $H,K \in \underline{H}$ und $R \in L(G^{\infty},K)$, $T \in L(H,E^1)$, $C \in S_2(H,H)$ so, dass $RYBTC \notin S_{2/3}(H,K)$.

Dies ist jedoch im Widerspruch zu

$$RYBTC \in \Gamma_{\infty} \circ \mathcal{Y} \circ A^{\circ} \circ \mathcal{D}_2(H,K) = \Gamma_{\infty} \circ \mathcal{Y} \circ A^{\circ} \circ \mathcal{D}_2 \circ A^{\circ\bullet}(H,K) \subset$$
$$\Gamma_{\infty} \circ \mathcal{Y} \circ X \circ \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{Y}(H,K) \subset \Gamma_{\infty} \circ \Gamma_2 \circ \mathcal{D}_2(H,K) = S_{2/3}(H,K).$$

▱

3.2.4 <u>SATZ</u> Falls A ein quasinormiertes Ideal ist, gelten:

(i) $A^{\circ} = [\mathcal{D}_2 \circ A]^{\Delta}$

(ii) $A^{\bullet} = [A \circ \mathcal{D}_2]^{\Delta}$

(iii) $A^{\circ} \circ \mathcal{D}_2 \circ A^{\circ\bullet} = A^{\circ} \circ \mathcal{D}_2 \circ [A^{\circ} \circ \mathcal{D}_2]^{\Delta}$

(iv) $A^{\bullet\circ} \circ \mathcal{D}_2 \circ A^{\bullet} = [\mathcal{D}_2 \circ A^{\bullet}]^{\Delta} \circ \mathcal{D}_2 \circ A^{\bullet}$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus 1.2.3.

3.2.5 <u>SATZ</u> (i) Falls $A \circ \mathcal{D}_2 \circ B$ ein Spurideal ist, so folgen

$$A \circ \mathcal{D}_2 \circ B \subset A^{\bullet\circ} \circ \mathcal{D}_2 \circ A^{\bullet} \quad \text{und}$$

$$A \circ \mathcal{D}_2 \circ B \subset B^{\circ} \circ \mathcal{D} \circ B^{\circ\bullet}$$

(ii) Jedes maximale Ideal in $\mathcal{T}_{\mathcal{D}_2}$ enthält $N_{1,2,2}$.

Beweis.

(i) $A \circ \mathcal{D}_2 \circ B \in \mathcal{T}$ bedeutet nach 3.2.1, dass $B \circ A \subset \Gamma_2$ ist. Daraus folgt $B \subset A^{\bullet}$ und $A \subset B^{\circ}$. Zudem ist $A \subset A^{\bullet\circ}$ und $B \subset B^{\circ\bullet}$ nach 3.2.2,(i).

(ii) Ist $A \circ \mathcal{D}_2 \circ B$ maximal in $\mathcal{T}_{\mathcal{D}_2}$, so ist $A \circ \mathcal{D}_2 \circ B = A^{\bullet\circ} \circ \mathcal{D}_2 \circ A^{\bullet}$ (oder auch $A \circ \mathcal{D}_2 \circ B = B^{\circ} \circ \mathcal{D}_2 \circ B^{\circ\bullet}$). Nach Definition von $A^{\bullet}, A^{\bullet\circ}$ gilt $\Gamma_2 \subset A^{\bullet}$, $\Gamma_2 \subset A^{\bullet\circ}$.
Damit ist $N_{1,2,2} = \Gamma_2 \circ \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_2 \subset A \circ \mathcal{D}_2 \circ B$. ▱

3.2.6 <u>KOROLLAR</u> Ist $A \circ \mathcal{D}_2 \circ B$ maximal in $\mathcal{T}_{\mathcal{D}_2}$, so ist

$$A \circ \mathcal{D}_2 \circ B = A^{\bullet\circ} \circ \mathcal{D}_2 \circ A^{\bullet} = B^{\circ} \circ \mathcal{D}_2 \circ B^{\circ\bullet}.$$

<u>Beispiele und Bemerkungen</u>

(a) Für $A \subset \Gamma_2$ und $B = L$ ergeben sich

$$A^{\circ} \circ \mathcal{D}_2 \circ A^{\circ\bullet} = B^{\bullet\circ} \circ \mathcal{D}_2 \circ B^{\bullet} = \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_2$$

und

$$B^{\circ} \circ \mathcal{D}_2 \circ B^{\circ\bullet} = A^{\bullet\circ} \circ \mathcal{D}_2 \circ A^{\bullet} = \Gamma_2 \circ \mathcal{D}_2 .$$

(b) Ein Ideal in $\mathcal{T}_{\mathcal{D}_2}$, das sogar nichtkompakte Operatoren enthält, ist $\Gamma_\infty \circ \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_1$. Z.B. gehört die formale Identität $J: \ell_1 \hookrightarrow \ell_\infty$ zu diesem Ideal.

Unsere Konstruktionsmethode liefert zwei echte Oberideale von $\Gamma_\infty \circ \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_1$ in $\mathcal{T}_{\mathcal{D}_2}$.

Setzen wir $A = \Gamma_\infty$, so wird $A^\bullet = \Gamma_2 \circ \Gamma_\infty^{-1} = M_{2,1}$ und $A^{\bullet o} = M_{2,1}^{-1} \circ \Gamma_2 = [\mathcal{D}_2 \circ M_{2,1}]^\Delta$; also $A^{\bullet o} \circ \mathcal{D}_2 \circ A^\bullet = [\mathcal{D}_2 \circ M_{2,1}]^\Delta \circ \mathcal{D}_2 \circ M_{2,1}$.

Setzen wir $B = \Gamma_1$, so wird $B^o = \Gamma_1^{-1} \circ \Gamma_2 = (\Gamma_\infty^d)^{-1} \circ \Gamma_2^d = (\Gamma_2 \circ \Gamma_\infty^{-1})^d = M_{2,1}^d$ gemäss 1.2.1.
Weiter wird $B^{o\bullet} = \Gamma_2 \circ (M_{2,1}^d)^{-1} = [M_{2,1}^d \circ \mathcal{D}_2]^\Delta$. Diesmal ergibt sich also $B^o \circ \mathcal{D}_2 \circ B^{o\bullet} = M_{2,1}^d \circ \mathcal{D}_2 \circ [M_{2,1}^d \circ \mathcal{D}_2]^\Delta$.

Nach [6,7] gibt es ein $E \in \underline{B}$, so dass die Identität I_E von E (2,1)-mischend ist, und ein $S \in P_1(E,H)$, $H \in \underline{H}$ mit $S \notin \Gamma_1(E,H)$. Da $\Gamma_2 \circ \Gamma_1$ injektiv ist, folgt $J_H S \notin \Gamma_2 \circ \Gamma_1(E,H^\infty) = \Gamma_\infty \circ \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_1(E,H^\infty)$.

Andrerseits ist natürlich $J_H S \in \Gamma_\infty \circ \mathcal{D}_2 \circ M_{2,1}$. Wegen $M_{2,1} \circ \Gamma_\infty \subset \Gamma_2$ ist dieses Ideal in $\mathcal{T}$, und es folgt nach 3.2.5 $J_H S \in \Gamma_\infty \circ \mathcal{D}_2 \circ M_{2,1} \subset [\mathcal{D}_2 \circ M_{2,1}]^\Delta \circ \mathcal{D}_2 \circ M_{2,1}$. Also ist $\Gamma_\infty \circ \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_1 \subsetneqq [\mathcal{D}_2 \circ M_{2,1}]^\Delta \circ \mathcal{D}_2 \circ M_{2,1}$.
Ebenso kann man $\Gamma_\infty \circ \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_1 \subsetneqq M_{2,1}^d \circ \mathcal{D}_2 \circ [M_{2,1}^d \circ \mathcal{D}_2]^\Delta$ erhalten.

3.3 *Spurideale der Form* $\Gamma_q \circ \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_p$ *bzw.* $(\Gamma_q \circ \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_p)^d$

In diesem Abschnitt sei wiederum stets $1 \leq p,q \leq \infty$.

Zur Abkürzung setzen wir $G_{p,q} := \Gamma_q \circ \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_p$ und $H_{p,q} := (G_{q^*,p^*})^d$. Ferner seien $\mathcal{T}_G$ die Klasse aller Spurideale $G_{p,q}$ und $\mathcal{T}_H$ die Klasse aller Spurideale $H_{p,q}$.

Wir werden zeigen, dass es in der Klasse $\mathcal{T}_H$ genau drei maximale Spurideale gibt.

Für die Klasse $\mathcal{T}_G$ besagt 3.2.1:

3.3.1 <u>SATZ</u> $G_{p,q}$ ist genau dann ein Spurideal, wenn $\Gamma_p \circ \Gamma_q \subset \Gamma_2$ erfüllt ist.

Eine entsprechende Charakterisierung für $\mathcal{T}_H$ erhalten wir in 3.3.6.

Wie schon in 1.2(d) erwähnt, gilt:

3.3.2 <u>SATZ</u> Falls $p=2$ oder $q=2$ oder $p \leq 2 \leq q$ ist, so folgt $\Gamma_p \circ \Gamma_q \subset \Gamma_2$.

Dass auch die umgekehrte Implikation richtig ist, zeigen die nächsten drei Lemmatas.

3.3.3 <u>LEMMA</u> Für $q \leq p < 2$ oder $2 < q \leq p$ ist $\Gamma_p \circ \Gamma_q \not\subset \Gamma_2$.

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall $q \leq p < 2$; der andere Fall ergibt sich mit Transposition. Angenommen, es sei doch $\Gamma_p \circ \Gamma_q \subset \Gamma_2$. Dann lässt sich die formale Identität $J: \ell_q \hookrightarrow \ell_p$ schreiben als $J = RS$ mit $R \in L(\ell_2, \ell_p)$ und $S \in L(\ell_q, \ell_2)$. Nach einem Satz von Pitt [24] ist aber $L(\ell_2, \ell_p) = K(\ell_2, \ell_p)$ und damit $J \in K(\ell_q, \ell_p)$: Widerspruch. ▨

Für den Beweis des nächsten Lemmas greifen wir auf ein Resultat aus [1] zurück.

Die dort behandelten Ideale $N_{r,s,t}$ der sogenannten (r,s,t)-nuklearen Operatoren $(0 < r < \infty,\ 1 \leq s,t \leq \infty,\ r^{-1} + s^{-1} + t^{-1} \geq 1)$ sind wie folgt definiert:
Seien $E, F \in \underline{B}$ und $T \in L(E,F)$. T gehört genau dann zu $N_{r,s,t}(E,F)$, wenn $T = UD(\alpha)V$ mit $\alpha \in \ell_r$, $V \in L(E, \ell_s)$ und $U \in L(\ell_{t^*}, F)$ gilt.

Setzt man nun

$$(*) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{v} &= 1 + \frac{1}{q^*} - \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad 2 \leq q^* \leq p \leq \infty \quad \text{und} \\ \frac{1}{v} &= 1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad 2 \leq p \leq q^* \leq \infty, \end{aligned}$$

so gilt nach Theorem 1 der oben zitierten Arbeit u.a., dass die Eigenwerte $(\lambda_n(S))_n$ von Operatoren S aus N_{1,p,q^*} in ℓ_v liegen, und dass man dabei v nicht durch eine kleinere Zahl ersetzen kann.

3.3.4 <u>LEMMA</u> Für $q<2<p$ ist $\Gamma_p \circ \Gamma_q \not\subset \Gamma_2$.

Beweis. Setzt man p und q mit $q<2<p$ in (*) ein, so erhält man in beiden Fällen $v>1$. Somit ist N_{1,p,q^*} kein Spurideal, und weil offensichtlich $N_{1,p,q^*} \subset G_{p,q}$ ist, schliessen wir mit 3.3.1, dass $\Gamma_p \circ \Gamma_q \not\subset \Gamma_2$. ▱

3.3.5 <u>LEMMA</u> Für $p \leq q<2$ oder $2<p \leq q$ ist $\Gamma_p \circ \Gamma_q \not\subset \Gamma_2$.

Beweis für $p \leq q<2$. Nach [19] gibt es einen Massraum $[\Omega,\mu]$, einen Unterraum G von $L_p(\mu)$ sowie einen linearen Homöomorphismus $\phi : \ell_q \longrightarrow G$. Sei $j : G \rightarrow L_p(\mu)$ die Inklusion. Wäre $j\phi \in \Gamma_2(\ell_q, L_p(\mu))$, so wäre wegen der Injektivität von Γ_2 auch $\phi \in \Gamma_2(\ell_q, G)$, und es folgte der Widerspruch $I_{\ell_q} \in K(\ell_q, \ell_q)$. Beweis des andern Falls durch Transposition. ▱

Zusammengefasst haben wir nun:

3.3.6 <u>SATZ</u> Aequivalent sind:

(i) $p \leq 2 \leq q$ oder $p=2$ oder $q=2$

(ii) $\Gamma_p \circ \Gamma_q \subset \Gamma_2$

(iii) $G_{p,q} \in \mathcal{T}$

(iv) $H_{p,q} \in \mathcal{T}$

Beweis. Nur noch die Aequivalenz von (iii) und (iv) bleibt zu zeigen. Via (i) ergibt sich, dass $\mathcal{G}_{p,q} \in \mathfrak{T}$ und $\mathcal{G}_{q^*,p^*} \in \mathfrak{T}$ äquivalent sind. Damit und wegen 2.2.4 folgt nun (iv) aus (iii). Aus (iii) folgt auch (iv): Falls nämlich $\mathcal{H}_{p,q} \in \mathfrak{T}$ ist, können wir $\mathcal{G}_{p,q} \in \mathfrak{T}$ schliessen, da $\mathcal{G}_{p,q}$ in $\mathcal{H}_{p,q}$ enthalten ist.

$\square$

Im Hinblick auf andere Anwendungen halten wir fest:

3.3.7 <u>SATZ</u> Falls $1 \leq p \leq 2 \leq q < \infty$ oder $1 < p \leq 2 \leq q \leq \infty$ oder $p=2$ oder $q=2$ ist, so gilt

$$\hat{\Gamma}_q \circ \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_p = \hat{\Gamma}_q \circ \mathcal{N}_1 \circ \hat{\Gamma}_p .$$

Beweis. Seien p,q so, dass $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$. Dann folgt aus 3.3.6 und 2.2.3, dass $\hat{\Gamma}_q \circ \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_p \subset \mathcal{G}_{p,q} \subset \mathcal{I}_1$. Weil wir $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2^{dd}$ haben, ist $\hat{\Gamma}_q \circ \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_p = \hat{\Gamma}_q \circ \mathcal{D}_2 \circ \hat{\Gamma}_p$. Für $q \neq \infty$ ergibt sich nun die Behauptung aus $\Gamma_q \subset \mathcal{W}$ und $\mathcal{W} \circ \mathcal{I}_1 = \mathcal{N}_1$, vgl. [22,24.6.2]. Falls $q=\infty$ und $p \neq 1$ ist, verwendet man Théorème 10 aus [9,S.133] und dass $L_\infty(\mu)$ ein komplementierter Unterraum von $L_\infty(\mu)''$ ist. Für $p=2$ oder $q=2$ ist die Behauptung wegen 3.1.3 evident.

$\square$

Wir beweisen nun noch einige Inklusionen zwischen gewissen Idealen $\mathcal{H}_{p,q} \in \mathfrak{T}$.

3.3.8 <u>LEMMA</u> Für $1 \leq p < 2$ ist $\mathcal{P}_2 \circ \Gamma_p \subset \mathcal{P}_2 \circ \Gamma_1$.

Beweis. Seien $1<p<2$, $E,F \in \underline{B}$ und $S \in \mathcal{P}_2 \circ \Gamma_p(E,F)$. Mit dem Faktorisierungssatz für $\mathcal{P}_2$ erhalten wir $H \in \underline{H}$, einen kompakten Hausdorff-Raum K, einen Raum $L_p(\mu)$ und Operatoren $X \in \mathcal{L}(E, L_p(\mu))$, $W \in \mathcal{L}(L_p(\mu), C(K)'')$, $V \in \mathcal{P}_2(C(K)'', H)$ und $U \in \mathcal{L}(H,F)$, so dass $S=UVWX$ ist. Nach [19] gibt es einen Raum $L_1(\nu)$ und eine homöomorphe Einbettung $J: L_p(\mu) \longrightarrow L_1(\nu)$, und W besitzt eine Fortsetzung $\tilde{W} \in \mathcal{L}(L_1(\nu), C(K)'')$. Damit ist $S = UV\tilde{W}JX \in \mathcal{P}_2 \circ \Gamma_1(E,F)$. ▱

<u>Bemerkung</u>

Ein anderer Beweis von 3.3.8 verwendet $I_{L_p(\mu)} \in \mathcal{M}_{2,1}$ (falls $1 \leq p \leq 2$, vgl. [22,22.3.5]) und einen Satz über Räume mit lokal unbedingter Struktur (vgl. [6,7]).

Für $1<p<2$ ist die Inklusion in 3.3.8 echt. Für die formale Identität $J_{1,2}: \ell_1 \hookrightarrow \ell_2$ haben wir nach 1.2(c), dass $J_{1,2} \in \mathcal{P}_2 \circ \Gamma_1(\ell_1, \ell_2)$ ist, aber andrerseits gilt offenbar $J_{1,2} \notin \mathcal{P}_2 \circ \Gamma_p$ wegen $\mathcal{P}_2 \circ \Gamma_p \subset \mathcal{V} \circ \mathcal{W} = \mathcal{K}$ (vgl. 1.2(k) und [22,17.3.10]).

Wegen 3.3.8 gilt nun offensichtlich

3.3.9 <u>KOROLLAR</u> Für $2<q \leq \infty$ ist $\mathcal{H}_{p,q} \subset \mathcal{H}_{p,\infty}$.

Ergänzend zeigen wir

3.3.10 <u>LEMMA</u> Für $1 \leq p < 2$ ist $\mathcal{H}_{p,q} \subset \mathcal{H}_{1,q}$.

Beweis. Seien $1<p<2$, $E,F \in \underline{B}$ und $S \in \mathcal{H}_{p,q}(E,F)$. Dann gibt es $H \in \underline{H}$ und $U \in \mathcal{P}_2 \circ \Gamma_{q^*}(F',H)$, $V \in \Gamma_{p^*} \circ \mathcal{P}_2^d(H,E')$ mit $S' = VU$. Wir haben nun $V' \in \mathcal{P}_2 \circ \Gamma_p(E'',H)$ und wegen 3.3.8 $V' \in \mathcal{P}_2 \circ \Gamma_1(E'',H)$. Daraus folgt $V'' \in \Gamma_\infty \circ \mathcal{P}_2^d(H,E''')$ und $(e_E)'V'' = V \in \Gamma_\infty \circ \mathcal{P}_2^d(H,E')$. Somit ist $S' \in \Gamma_\infty \circ \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_{q^*}$, d.h. $S \in \mathcal{H}_{1,q}$. ▱

Abschliessend erhalten wir

3.3.11 <u>THEOREM</u> Die einzigen maximalen Ideale in $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$ sind

$$\mathcal{H}_{2,1} = \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_2,$$

$$\mathcal{H}_{\infty,2} = \Gamma_2 \circ \mathcal{D}_2 \quad \text{und}$$

$$\mathcal{H}_{1,\infty} = (\Gamma_\infty \circ \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_1)^d = \Gamma_\infty \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1.$$

Beweis. Zuerst zeigen wir $\mathcal{H}_{1,\infty} = \Gamma_\infty \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1$:
Seien $E,F \in \underline{B}$ und $S \in \mathcal{H}_{1,\infty}(E,F) = (\Gamma_\infty \circ \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_1)^d(E,F)$. Dann gibt es ein $H \in \underline{H}$ und $A \in \Gamma_\infty(H,E')$, $B \in \Gamma_1(F',H)$ mit $AB = S'$. Sei nun H_0 die abgeschlossene Hülle in H von $(B')^{-1}(e_F(F))$ und $p: H \longrightarrow H_0$ die Orthogonalprojektion. B' induziert einen Operator $(B')_0 \in \Gamma_\infty(H_0,F)$ mit $S = (B')_0\, p\, A'\, e_E \in \Gamma_\infty \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1(E,F)$.

Da $(e_E)' : E''' \longrightarrow E'$ für jedes $E \in \underline{B}$ eine Projektion ist, folgt mit 1.2(c),(d), dass $\Gamma_\infty \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1 \subset \mathcal{H}_{1,\infty}$ ist. $\mathcal{H}_{2,1} = (\Gamma_2 \circ \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_\infty)^d =$

$(\Gamma_2 \circ \mathcal{D}_2)^d = \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_2$ und $\mathcal{H}_{\infty,2} = (\Gamma_1 \circ \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_2)^d = (\mathcal{D}_2 \circ \Gamma_2)^d = \Gamma_2 \circ \mathcal{D}_2$ folgen z.B. aus 3.1.3 und 3.1.4.

Wir zeigen nun noch die Maximalitätsaussagen:

Ist $\mathcal{H}_{p,q} \in \mathcal{T}$, so liegt einer der Fälle $p=2$, $q=2$ oder $p<2<q$ vor. Entsprechend ist dann $\mathcal{H}_{p,q} \subset \mathcal{H}_{2,1}$, $\mathcal{H}_{p,q} \subset \mathcal{H}_{\infty,2}$ oder $\mathcal{H}_{p,q} \subset \mathcal{H}_{1,\infty}$. Weil $\mathcal{H}_{2,1}$ und $\mathcal{H}_{\infty,2}$ sogar in $\mathcal{T}_{\mathcal{D}_2}$ maximal sind und $\mathcal{H}_{1,\infty}$ nicht enthalten (vgl. 3.5(a)), sind die Maximalitätsaussagen evident. $\square$

3.4 Spurideale der Form $A \circ \Gamma_2 \circ B$

Die Klasse aller Spurideale der Form $A \circ \Gamma_2 \circ B$ bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_{\Gamma_2}$.
Dies ist die umfassendste Klasse von Spuridealen, die wir behandeln. Unseres Wissens ist kein Spurideal bekannt, das nicht in einem Ideal aus dieser Klasse enthalten ist.

Grundlegend ist das folgende Analogon zu 3.2.1

3.4.1 SATZ Dann und nur dann ist $A \circ \Gamma_2 \circ B$ ein Spurideal, wenn $B \circ A \subset \mathcal{D}_2$ ist.

Beweis. $A \circ \Gamma_2 \circ B \in \mathcal{T}$ ist nach 2.2.7 äquivalent zu $\Gamma_2 \circ B \circ A \in \mathcal{T}$ und dies wiederum zu $B \circ A \subset \mathcal{D}_2$ nach 3.1.1. ▱

Analog zum Vorgehen bei $\mathcal{T}_{\mathcal{D}_2}$ setzen wir für ein Ideal A:

$$A_\circ := A^{-1} \circ \mathcal{D}_2$$
$$A_\bullet := \mathcal{D}_2 \circ A^{-1}.$$

Wir erhalten unmittelbar:

3.4.2 LEMMA Folgende Aussagen gelten für jedes Ideal A:

(i) $A \subset A_{\circ\bullet}$, $A \subset A_{\bullet\circ}$,

(ii) $A_{\circ\bullet} \circ A_\circ \subset \mathcal{D}_2$, $A_\bullet \circ A_{\bullet\circ} \subset \mathcal{D}_2$.

Im Gegensatz zur Klasse $\mathcal{T}_{\mathcal{D}_2}$ sind wir hier aber nur in speziellen Fällen in der Lage, die Maximalität von $A_{\bullet o}\circ\Gamma_2\circ A_{\bullet}$ oder $A_o\circ\Gamma_2\circ A_{o\bullet}$ zu zeigen. Zunächst haben wir:

3.4.3 <u>SATZ</u> Für alle Ideale A,B gelten:

(i) $A_{\bullet o}\circ\Gamma_2\circ A_{\bullet}\in\mathcal{T}$, $B_o\circ\Gamma_2\circ B_{o\bullet}\in\mathcal{T}$

(ii) Falls $A\circ\Gamma_2\circ B\in\mathcal{T}$ ist, folgen

$A\circ\Gamma_2\circ B\subset A_{\bullet o}\circ\Gamma_2\circ A_{\bullet}$,

$A\circ\Gamma_2\circ B\subset B_o\circ\Gamma_2\circ B_{o\bullet}$.

Beweis. Analog zum Beweis von 3.2.2. ▱

3.4.4 <u>THEOREM</u> Für alle Ideale A,B gelten:

(i) Falls $\Gamma_2\circ\Gamma_1\subset A_{\bullet}\subset P_1$, ist $A_{\bullet o}\circ\Gamma_2\circ A_{\bullet}$ maximal in $\mathcal{T}_{\Gamma_2}$.

(ii) Falls $\Gamma_\infty\circ\Gamma_2\subset B_o\subset P_1^d$, ist $B_o\circ\Gamma_2\circ B_{o\bullet}$ maximal in $\mathcal{T}_{\Gamma_2}$.

(iii) Die maximalen Ideale in (i) und (ii) enthalten $\Gamma_\infty\circ\Gamma_2\circ\Gamma_1$.

Beweis. (vgl. Beweis von 3.2.3)

(i) Sei A ein Ideal mit $\Gamma_2\circ\Gamma_1\subset A_{\bullet}\subset P_1$, und seien X,Y Ideale mit $A_{\bullet o}\circ\Gamma_2\circ A_{\bullet}\subset X\circ\Gamma_2\circ Y\in\mathcal{T}$. Angenommen, es gibt $F\in\underline{B}$, $H\in\underline{H}$ und $X\in X(H,F)\setminus A_{\bullet o}(H,F)$. Dann existieren nach Definition von $A_{\bullet o}$ ein $E\in\underline{B}$ und $B\in A_{\bullet}(F,H)$ mit $BX\notin\mathcal{D}_2(H,H)$. Wir können ein $D\in S_2(H,H)$ wählen, so dass $DBX\notin S_{2/3}(H,H)$ ist.

Aus $A_\bullet \subset P_1$ folgt $(P_1)_0 = (\Gamma_2 \circ P_1)^\Delta = P_1{}^\Delta \circ \Gamma_2^{-1} = \Gamma_\infty \circ \Gamma_2^{-1} \subset A_{\bullet 0}$ und weiter

$$DBX \in \Gamma_\infty \circ \Gamma_2 \circ A_\bullet \circ X(H,H) = \Gamma_\infty \circ A_{\bullet 0} \circ \Gamma_2 \circ A_\bullet \circ X(H,H) \subset$$
$$\Gamma_\infty \circ X \circ \Gamma_2 \circ \mathcal{Y} \circ X(H,H) \subset \Gamma_\infty \circ \Gamma_2 \circ \mathcal{D}_2(H,H) = S_{2/3}(H,H):$$

ein Widerspruch.

Nun nehmen wir an, es existieren $E \in \underline{B}$, $H \in \underline{H}$ und $Y \in \mathcal{Y}(E,H) \setminus A_\bullet(E,H)$. Sodann gibt es $A \in \mathcal{A}(H,E)$ und $D \in S_2(H,H)$ derart, dass $YAD \notin S_{2/3}(H,H)$.

Andrerseits ist

$$YAD \in \mathcal{Y} \circ A \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1(H,H) \subset \mathcal{Y} \circ A_{\bullet 0} \circ \Gamma_2 \circ A_\bullet \circ \Gamma_1(H,H) \subset$$
$$\mathcal{Y} \circ X \circ \Gamma_2 \circ \mathcal{Y} \circ \Gamma_1(H,H) \subset \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1(H,H) = S_{2/3}(H,H).$$

Also ein Widerspruch.

(ii) wird analog zu (i) bewiesen.

(iii) Aus $A_\bullet \subset P_1$ folgt $A_{\bullet 0} = A_\bullet{}^{-1} \circ \mathcal{D}_2 \supset P_1^{-1} \circ \mathcal{D}_2 = (\Gamma_2 \circ P_1)^\Delta = P_1{}^\Delta \circ \Gamma_2^{-1} = \Gamma_\infty \circ \Gamma_2^{-1}$. Damit ist schliesslich $A_{\bullet 0} \circ \Gamma_2 \circ A_\bullet \supset \Gamma_\infty \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1$. ▱

3.4.5 <u>LEMMA</u> Für quasinormierte Ideale $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ hat man

$$A_{\bullet 0} \circ \Gamma_2 \circ A_\bullet = A^{\Delta\Delta} \circ \Gamma_2 \circ A^\Delta \quad \text{und}$$
$$B_0 \circ \Gamma_2 \circ B_{0\bullet} = B^\Delta \circ \Gamma_2 \circ B^{\Delta\Delta}.$$

Beweis für die erste Aussage.

Wir haben $A_\bullet = \mathcal{D}_2 \circ A^{-1} = (A \circ \Gamma_2)^\Delta$ und $A_{\bullet 0} = [(A \circ \Gamma_2)^\Delta]^{-1} \circ \mathcal{D}_2 = (\Gamma_2 \circ (A \circ \Gamma_2)^\Delta)^\Delta = (A \circ \Gamma_2)^{\Delta\Delta} \circ \Gamma_2^{-1}$, also $A_{\bullet 0} \circ \Gamma_2 \subset A^{\Delta\Delta} \circ \Gamma_2$. Andrerseits folgt aus $A_\bullet = \Gamma_2^{-1} \circ A^\Delta$, dass $\Gamma_2 \circ A_\bullet \subset A^\Delta$ und $A^{\Delta\Delta} \subset A_{\bullet 0}$.

Zusammen ergibt sich $A_{\bullet 0}\circ\Gamma_2 = A^{\Delta\Delta}\circ\Gamma_2$. Weil auch $\Gamma_2\circ A_\bullet = \Gamma_2\circ(\Gamma_2^{-1}\circ A^\Delta) = \Gamma_2\circ A^\Delta$ ist, folgt die Behauptung. ///

Beispiele

(a) Setzen wir $B = P_1$, so wird $B^\Delta = \Gamma_\infty$ und $\Gamma_2\circ B^{\Delta\Delta} = \Gamma_2\circ P_1$, also ist $B^\Delta\circ\Gamma_2\circ B^{\Delta\Delta} = \Gamma_\infty\circ\Gamma_2\circ P_1$.
Ebenso sieht man ein, dass $A = \Gamma_\infty$ das in $\mathfrak{T}_{\Gamma_2}$ maximale Ideal $A^{\Delta\Delta}\circ\Gamma_2\circ A^\Delta = \Gamma_\infty\circ\Gamma_2\circ P_1$ liefert.

(b) Setzen wir $B = \Gamma_1$, so wird $B^\Delta\circ\Gamma_2 = P_1{}^d\circ\Gamma_2$ und $\Gamma_2\circ B^{\Delta\Delta} = \Gamma_2\circ\Gamma_1$, also $B^\Delta\circ\Gamma_2\circ B^{\Delta\Delta} = P_1{}^d\circ\Gamma_2\circ\Gamma_1$. Ebenso ergibt $A = P_1^d$ das in $\mathfrak{T}_{\Gamma_2}$ maximale Ideal $A^{\Delta\Delta}\circ\Gamma_2\circ A^\Delta = P_1{}^d\circ\Gamma_2\circ\Gamma_1$.

(c) Für $B = P_2\circ M_{2,1}$ erhält man

$$B^\Delta\circ\Gamma_2\circ B^{\Delta\Delta} = (P_2\circ M_{2,1})^\Delta\circ\Gamma_2\circ(P_2\circ M_{2,1})^{\Delta\Delta}$$

als maximale Erweiterung von $[D_2\circ M_{2,1}]^\Delta\circ D_2\circ M_{2,1}$ in $\mathfrak{T}_{\Gamma_2}$.

(d) Für $A = M_{2,1}{}^d\circ P_2{}^d$ ergibt sich die in $\mathfrak{T}_{\Gamma_2}$ maximale Erweiterung

$$A^{\Delta\Delta}\circ\Gamma_2\circ A^\Delta = (M_{2,1}{}^d\circ P_2{}^d)^{\Delta\Delta}\circ\Gamma_2\circ(M_{2,1}{}^d\circ P_2{}^d)^\Delta$$

von $M_{2,1}{}^d\circ D_2\circ(M_{2,1}{}^d\circ D_2)^\Delta$.

(e) Das in $\mathfrak{T}_{\Gamma_2}$ maximale Ideal $\Gamma_\infty\circ\Gamma_2\circ P_1$ ist eine Erweiterung von $\Gamma_\infty\circ D_2\circ M_{2,1}$.
Ebenso ist das in $\mathfrak{T}_{\Gamma_2}$ maximale Ideal $P_1{}^d\circ\Gamma_2\circ\Gamma_1$ eine Erweiterung von $M_{2,1}{}^d\circ D_2\circ\Gamma_1$.

3.5 *Beziehungen zwischen den Spuridealen*

(a) Da $\Gamma_\infty \circ \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_1$ nichtkompakte Operatoren enthält, aber $\mathcal{D}_2 \circ \Gamma_2$, $\Gamma_2 \circ \mathcal{D}_2$ nur aus kompakten Operatoren bestehen, kann kein Oberideal von $\Gamma_\infty \circ \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_1$ in $\mathcal{D}_2 \circ \Gamma_2$ oder $\Gamma_2 \circ \mathcal{D}_2$ enthalten sein.

(b) Für den Operator S aus 3.2(b) können wir schreiben:

$$J_H S \notin \Gamma_\infty \circ \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_1(E,H^\infty) = M_{2,1}{}^d \circ \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_1(E,H^\infty) = P_1{}^d \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1(E,H^\infty).$$

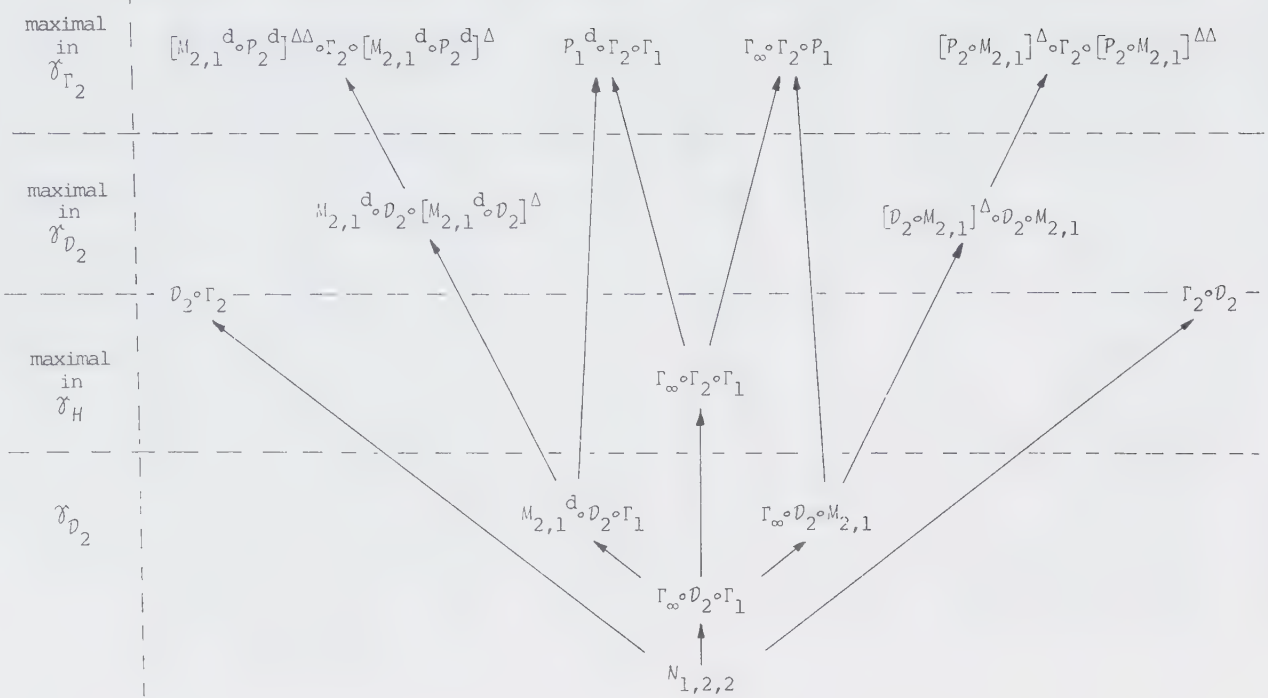
Es ist jedoch $J_H S \in \Gamma_\infty \circ \Gamma_2 \circ P_1(E,H^\infty) = \Gamma_\infty \circ \mathcal{D}_2 \circ M_{2,1}(E,H^\infty)$.

Somit ist $\Gamma_\infty \circ \mathcal{D}_2 \circ \Gamma_1 \subsetneqq \Gamma_\infty \circ \mathcal{D}_2 \circ M_{2,1}$ und
$\Gamma_\infty \circ \mathcal{D}_2 \circ M_{2,1} \not\subset P_1{}^d \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1$.

(c) Es gelten $(\Gamma_\infty \circ \Gamma_2 \circ P_1)^d = P_1{}^d \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1$ und $(P_1{}^d \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1)^d = \Gamma_\infty \circ \Gamma_2 \circ P_1$.

(d) Die Beziehungen aus (a), (b) lassen sich auf die dualen Ideale übertragen.

3.6 Eine Uebersicht



3.7 Offene Probleme

(a) Ist $N_{1,2,2}$ in jedem Ideal $A_{\bullet\circ}\circ\Gamma_2\circ A_{\bullet}$ bzw. $A_{\circ}\circ\Gamma_2\circ A_{\circ\bullet}$ enthalten? In [12] wird ein entsprechendes Problem für vollständige normierte $\underline{H}$-Ideale und ein äquivalentes Problem für gewisse Folgenräume gestellt (vgl. auch 3.2.5).

(b) Sind $\Gamma_2\circ\mathcal{D}_2$ und $\mathcal{D}_2\circ\Gamma_2$ maximal in $\mathcal{T}_{\Gamma_2}$ (oder sogar in $\mathcal{T}$)?

(c) Ist jedes Spurideal in einem Ideal aus $\mathcal{T}_{\Gamma_2}$ enthalten?

(d) Seien $E,F\in\underline{B}$ und $S\in L(E,F)$. Dann sind $S\in\Gamma_\infty\circ\Gamma_2\circ\Gamma_1(E,F)$ und $e_F S\in\Gamma_\infty\circ\mathcal{D}_2\circ\Gamma_1(E,F'')$ äquivalent. Falls F in F" komplementiert ist, gilt $\Gamma_\infty\circ\Gamma_2(E,F) = \Gamma_\infty\circ P_2^{\,d}(E,F)$ (und damit auch $\Gamma_\infty\circ\Gamma_2\circ\Gamma_1(E,F) = \Gamma_\infty\circ\mathcal{D}_2\circ\Gamma_1(E,F)$).
Ist sogar $\Gamma_\infty\circ\Gamma_2 = \Gamma_\infty\circ P_2^{\,d}$ richtig?

(e) Ist die Inklusion $P_2\circ M_{2,1}\subset\Gamma_2\circ P_1$ echt?
Wegen der Injektivität von $P_2\circ M_{2,1}$ und $\Gamma_2\circ P_1$ ist $P_2\circ M_{2,1} = \Gamma_2\circ P_1$ äquivalent zu $\Gamma_\infty\circ P_2\circ M_{2,1} = \Gamma_\infty\circ\Gamma_2\circ P_1$.
Wäre die Antwort auf (d) und auf obige Frage positiv, so hätte man sogar $\Gamma_\infty\circ\Gamma_2\circ P_1 = \Gamma_\infty\circ\mathcal{D}_2\circ M_{2,1}$. Entsprechende Fragen bestehen für $P_1^{\,d}\circ\Gamma_2\circ\Gamma_1$ und $M_{2,1}^{\,d}\circ\mathcal{D}_2\circ\Gamma_1$.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] CARL, B.: The distribution of eigenvalues of nuclear operators in Banach spaces (Russian) Vestnik Moskov. Univ. Mat. 31, 3-10(1976). English transl.: Moscow Univ. Mat. Bull. 31, 60-66 (1976).

[2] COHEN, J.S.: Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates, Math. Ann. 201, 177-200(1973).

[3] DOWSON, H.R.: Spectral theory of linear operators, London-New York-San Francisco 1978.

[4] ENFLO, P.: A counterexample to the approximation problem in Banach spaces, Acta Math. 130, 309-317(1973).

[5] GOHBERG, I.C., KREJN, M.G.: Introduction to the theory of linear non-selfadjoint operators in Hilbert space, Providence 1969.

[6] GORDON, Y., LEWIS, D.R.: Absolutely summing, L_1 factorizable operators and their applications, Bull. Am. Math. Soc. 79, 1270-1273(1973).

[7] GORDON, Y., LEWIS, D.R.: Absolutely summing operators and local unconditional structure, Acta Math. 133, 27-48(1974).

[8] GORDON, Y., LEWIS, D.R., RETHERFORD, R.: Banach ideals of operators with applications, J. Funct. Anal. 14, 85-129(1973).

[9] GROTHENDIECK, A.: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Am. Math. Soc. 16 (1955).

[10] GROTHENDIECK, A.: On the trace of certain operators, Studia Math. 20, 141-143(1961).

[11] HA, C.W.: On the trace of a class of nuclear operators, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 3, 131-137(1975).

[12] HOLUB, J.R.: On the factorization of nuclear operators on Hilbert space, J. Math. Anal. Appl. 54, 617-621(1976).

[13] HSIEH, M.S.: Quasi normed ideals of bounded linear operators, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 4, 87-98(1976).

[14] KACZMARZ, S., STEINHAUS, H.: Theorie der Orthogonalreihen, Moscow 1958.

[15] KÖNIG, H.: s-numbers, eigenvalues and the trace theorem in Banach spaces, Studia Math. 67, 157-171(1980).

[16] KÖNIG, H.: A Fredholm determinant theory for p-summing maps in Banach spaces, Math. Ann. 247, 255-274(1980).

[17] KWAPIEŃ, S.: On operators factorizable through L_p spaces, Bull. Soc. Math. France, Mém. 31-32, 215-225(1972).

[18] LIDSKIJ, V.B.: Non selfadjoint operators with a trace, Dokl. Akad. Nauk SSSR.125, 485-488(1959). English transl.: Amer. Math Soc. Transl. (2) 47, 43-46(1965).

[19] LINDENSTRAUSS, J., PEŁCZYŃSKI, A.: Absolutely summing operators and their applications, Studia Math. 29, 275-326(1968).

[20] MAUREY, B.: Théorèmes de factorization pour les opérateurs à valeurs dans un espace L^p, Astérisque, Soc. Math. France, no.11(1974).

[21] PIETSCH, A.: Eigenwertverteilung von Operatoren in Banach-Räumen. Hausdorff-Festband, Theory of sets and topology, Berlin 1972, 391-402.

[22] PIETSCH, A.: Operator Ideals, Berlin 1978 / Amsterdam-New York-Oxford 1980.

[23] PIETSCH, A.: Operator ideals with a trace, Friedr. Schiller Univ. Jena, Forsch. Ber. N/80/42 (1980).

[24] PITT, H.R.: A note on bilinear forms, J. London Math. Soc. 11, 174-180(1936).

[25] PUHL, J.: Quotienten von Operatorenidealen, Math. Nachr. 79, 131-144(1977).

[26] RINGROSE, J.R.: Compact non-self-adjoint operators, New York-Cincinnati-Toronto-Melbourne 1971.

[27] SIMON, B.: Trace ideals and their applications, Cambridge-London-New York-Melbourne 1979.

[28] VARADARAJAN, V.S.: Geometry of Quantum Theory, Vol. I, Princeton-Toronto-London-Melbourne 1968.

LEBENSLAUF

Am 22. Dezember 1947 wurde ich, Rudolf Ott, als Bürger von Bischofszell (Kt. Thurgau) in St.Gallen geboren.

Während einer Berufslehre, im Sommer 1965, begann ich mich auf die Eidg. Maturitätsprüfung vorzubereiten, die ich dann, nach einjährigem Besuch der Tagesschule der Akademikergemeinschaft, im Herbst 1969 bestand. Anschliessend nahm ich im Wintersemester 1969/70 das Studium der Mathematik und der Physik an der Universität Zürich auf und erwarb im Herbst 1975 das Diplom in Mathematik. Seither bin ich als Assistent an der Universität Zürich tätig, zur Zeit am Seminar für Angewandte Mathematik. Daneben habe ich im Frühjahr 1981 einen Lehrauftrag an der Kantonsschule Hottingen angenommen.

Während meines Studiums besuchte ich Vorlesungen und Seminarien bei folgenden Dozenten:
E.Brun, B.Eckmann, E.Engeler, W.Greub, H.Gross, I.C.Gohberg, W.Heitler, H.Jarchow, H.H.Keller, G.Karrer, A.Kriszten, V.Meyer, G.Rasche, H.Staub, A.Steiner, H.H.Storrer, N.Straumann, V.Strassen, K.Strebel, A.Thellung, O.Woodtli, A.Wyler.

Die vorliegende Dissertation entstand unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. H.Jarchow. Ihm danke ich herzlich für zahlreiche Anregungen und sein stetes Interesse während des Entstehens dieser Arbeit.